Chapitre 3

LA TRANSFORMEE DE FOURIER

Objectifs

Général

- *L'étudiant apprendra à utiliser la transformée de Fourier.*

Spécifiques

- *Déterminer les transformées de Fourier de signaux simples ;*
- *Calculer la décomposition en séries de Fourier de signaux simples.*

I. Introduction

Le lien entre la représentation temporelle d'un signal et sa représentation fréquentielle est la décomposition en Série de Fourier (DSF) pour les signaux périodiques ou la Transformée de Fourier (TF) pour les signaux non périodiques.

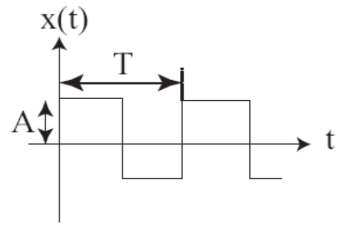
II. Les signaux périodiques

II.1. Définitions

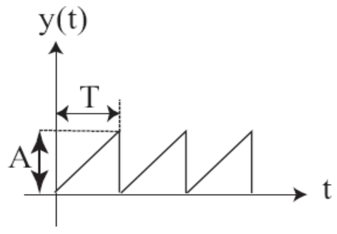
Un signal $x(t)$ est périodique s'il existe une durée T telle que $x(t + T) = x(t)$.

Exemples :

Signal carré



Signal en dents de scie



Un signal périodique $x(t)$ est caractérisé par :

– son amplitude A;

– sa période T (en secondes) ou sa fréquence $f = \frac{1}{T}$,

– sa puissance moyenne $P = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$

– sa valeur moyenne (composante continue) : $X_m = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$.

II.2. Signaux sinusoïdaux

Les signaux sinusoïdaux (ou harmoniques) sont des signaux périodiques très importants. Ce sont les signaux de la forme :

$$x(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t + \phi_0)$$

Avec : – A_0 : amplitude ;

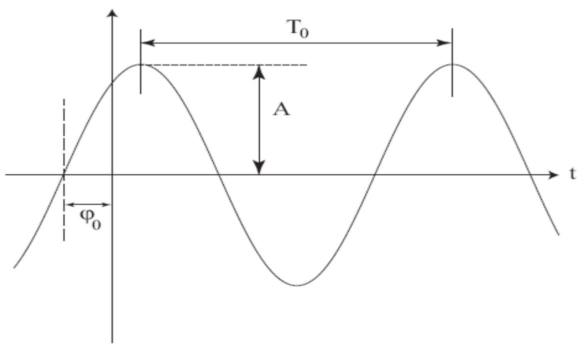
– f_0 : fréquence ;

– ϕ_0 : phase à l'origine (ou déphasage ou phase) ;

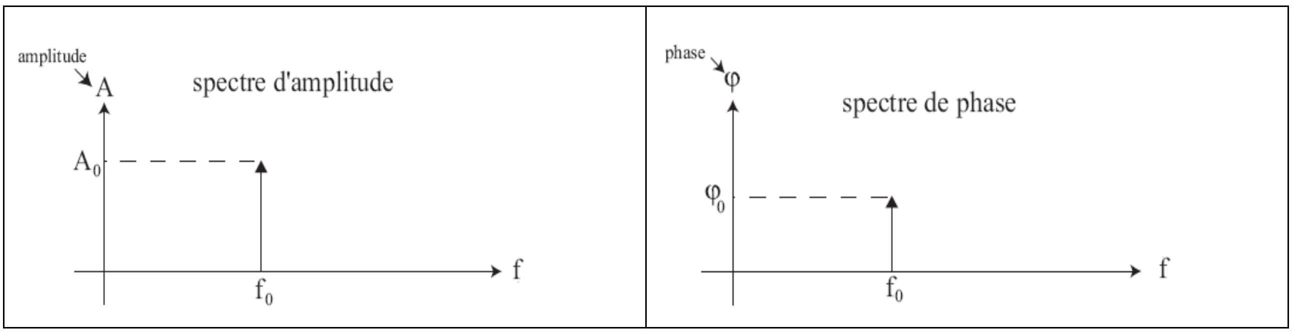
– $2\pi f_0 t + \phi_0$: phase instantanée.

Puissance d'un signal sinusoïdal : $P = \frac{A^2}{2}$

Représentation temporelle d'un signal sinusoïdal :



Autre représentation d'un signal sinusoïdal : c'est la *représentation spectrale (en fonction de la fréquence).*



III. Spectre d'un signal périodique

III.1. Développement en série de Fourier

Soit $x(t)$ un signal périodique quelconque (non sinusoïdal) de période T (ou de fréquence $f = \frac{1}{T}$). On montre que $x(t)$ peut s'écrire sous la forme d'un *développement en série de Fourier*, c'est-à-dire une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples entiers de f :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nft) + a_n \sin(2\pi nft)$$

Avec :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

Et $\forall n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi nft)\,dt\,,\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(2\pi nft)\,dt$$

Le signal sinusoïdal de fréquence f est appelé *fondamental* et les signaux sinusoïdaux de fréquences nf, $n \geq 2$ sont appelés *harmoniques*.

Remarque :

Si $x(t)$ ***est impair*** (c-à-d $x(-t) = -x(t)$), alors $\forall n > 0$, $a_n = 0$

Si $x(t)$ ***est pair*** (c-à-d $x(-t) = x(t)$) alors $\forall n > 1$, $b_n = 0$.

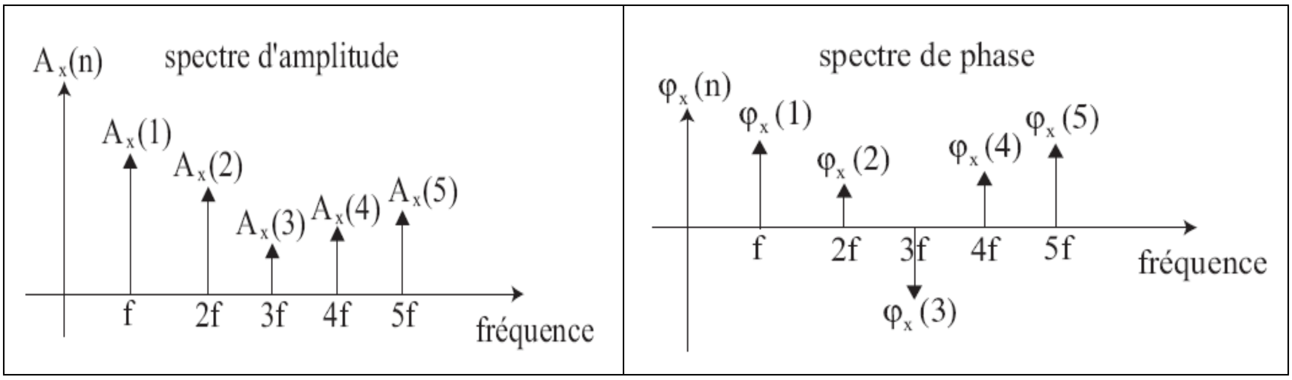
III.2. Représentation spectrale d'un signal périodique

Le développement en série de Fourier d'un signal périodique $x(t)$ peut également s'écrire sous la forme : $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_x(n)\cos(2\pi nft + \phi_x(n))$

Avec : $A_x(n) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\phi_x(n) = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

$A_x(n)$ et $\phi_x(n)$ représentent respectivement le spectre d'amplitude et le spectre de phase de $x(t)$. Ce sont des *spectres de raies* ou *spectres discrets* : un signal périodique ne possède de composantes spectrales que pour des fréquences multiples entiers du fondamental.

Représentation graphique :



En pratique, le spectre d'un signal est visualisé au moyen d'un *analyseur de spectre*.

IV. Généralisation de la notion de spectre

IV.1. Spectre d'un signal non périodique

Soit $x(t)$ un signal quelconque, en particulier non périodique. On montre dans ce cas que le spectre de $x(t)$ est une fonction continue de la fréquence, c'est-à-dire que $x(t)$ possède des composantes spectrales à toutes les fréquences. Le signal $x(t)$ peut alors s'écrire sous la forme :

$$x(t) = \int_0^{+\infty} A_x(f)\cos\left(2\pi ft + \phi_x(f)\right)df$$

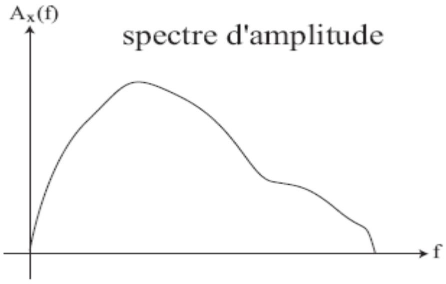
Avec :

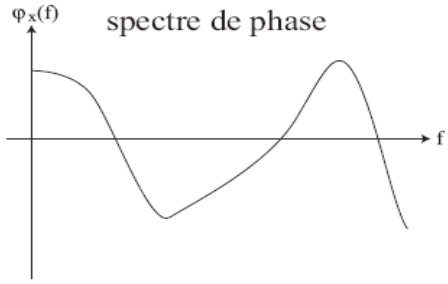
$$\begin{cases} A_x(f) = 2\left|X(f)\right| & \text{: spectre d'amplitude} \\ \phi_x(f) = \arg X(f) & \text{: spectre de phase} \end{cases}$$

où $X(f)$ est la *transformée de Fourier* de $x(t)$ définie par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Contrairement aux signaux périodiques, les signaux non périodiques possèdent donc un spectre *continu* :

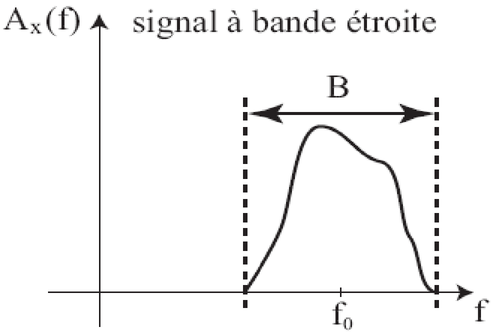


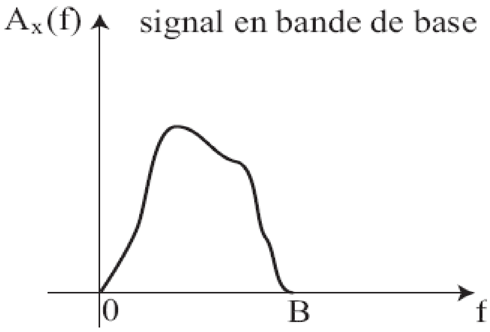


IV.2. Spectre des signaux utilisés en télécommunications

Les signaux transmis par un système de télécommunications sont des signaux à *bande étroite*. Ces signaux possèdent un spectre nul en dehors d'un intervalle de largeur *B*, appelée *largeur de bande* ou *occupation spectrale* du signal.

Cet intervalle est généralement centré autour d'une fréquence f_0 appelée *fréquence centrale du signal*. S'il est de la forme [0, *B*], alors le signal est appelé *signal en bande de base*.





La connaissance du spectre d'un signal permet de dimensionner les canaux de transmission.