Chapitre 3

Simplification des fonctions logiques

Objectifs :

- ✓ Connaitre les différentes formes de représentation d'une fonction logique.
- ✓ Etudier les méthodes de simplification des fonctions logiques.
- ✓ Apprendre à simplifier les expressions logiques.

1. Représentation d'une fonction logique :

Une fonction logique peut se représenter principalement sous 4 formes:

- table de vérité
- forme algébrique
- logigramme ou schéma d'implantation
- tableau de KARNAUGH

1.1 Représentation sous forme d'une table de vérité

La table de vérité permet de représenter toutes les combinaisons possibles des variables binaires d'une fonction logique. Elle comporte **2^n** lignes et **n+1** colonnes (**'n'** étant le nombre des variables binaires dont dépend la fonction (les variables d'entrée)).

Exemple : Soit la fonction **F(A,B,C)** qui vaut **1** si, deux variables parmi A,B,C ou les trois sont à l'état **1**.

Cette fonction a trois variables d'entrée donc sa table de vérité comporte **2^3=8** lignes et (**3+1=4**) colonnes.

Combinaison	A	B	C	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

La sortie **F** est à l'état **1** si au moins deux variables d'entrée (**A, B** et **C**) sont simultanément à l'état **1**.

Remarque : Si pour chaque combinaison des variables d'entrée la valeur de la sortie est connue, on dit que la fonction est ***complètement définie***. Si la valeur de la sortie est inconnue (non spécifiée) pour une combinaison ou plus, on l'indique par **X** ou ϕ et on dit que la fonction est ***incomplètement définie***.

1.2 Représentation algébrique

On peut représenter une fonction logique par une équation algébrique qui peut être sous forme **canonique** :

« Une expression est canonique lorsque tous ses termes renferment toutes les variables, soit sous forme directe, soit sous forme complémentée. »

Pour toute fonction, il est possible d'établir l'expression canonique sous deux formes :

- ***Première forme canonique (forme disjonctive)*: c'est la somme logique(ou réunion) des *mintermes* associés aux combinaisons** pour lesquelles la fonction vaut **1** (somme de produits).
- ***Deuxième forme canonique*** *(forme conjonctive)*: c'est le produit logique (ou intersection) des ***maxtermes*** associés aux combinaisons pour lesquelles la fonction vaut **0** (produit de sommes).

➢ Minterme : il est défini comme étant le produit logique des variables booléennes considérées avec la convention suivante :

- ✓ si la variable est égale à 1 alors inscrire la variable elle-même.
- ✓ si la variable est égale à 0 alors inscrire son complément.

➢ Maxterme : il est défini comme étant la somme logique des variables booléennes considérées avec la convention suivante :

- ✓ si la variable est égale à 0 alors inscrire la variable elle-même.
- ✓ si la variable est égale à 1 alors inscrire son complément.

Combinaison	A	B	C	F	Minterme	Maxterme
0	0	0	0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$A+B+C$
1	0	0	1	0	$\bar{A}\bar{B}C$	$A+B+\bar{C}$
2	0	1	0	0	$\bar{A}B\bar{C}$	$A+\bar{B}+C$
3	0	1	1	1	$\bar{A}BC$	$A+\bar{B}+\bar{C}$
4	1	0	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}+B+C$
5	1	0	1	1	$A\bar{B}C$	$\bar{A}+B+\bar{C}$
6	1	1	0	1	$AB\bar{C}$	$\bar{A}+\bar{B}+C$
7	1	1	1	1	ABC	$\bar{A}+\bar{B}+C$

On remarque que :

- la fonction **F(A,B,C)** est à l'état **1** pour les combinaisons **3**,**5**, **6** et **7**. On l'écrit sous une forme dite numérique : **F(A,B,C) =R(3,5,6,7)** (c'est-à-dire réunion des combinaisons 3, 5, 6 et7). D'où la première forme canonique de F :

$$\boxed{\mathbf{F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC}}$$

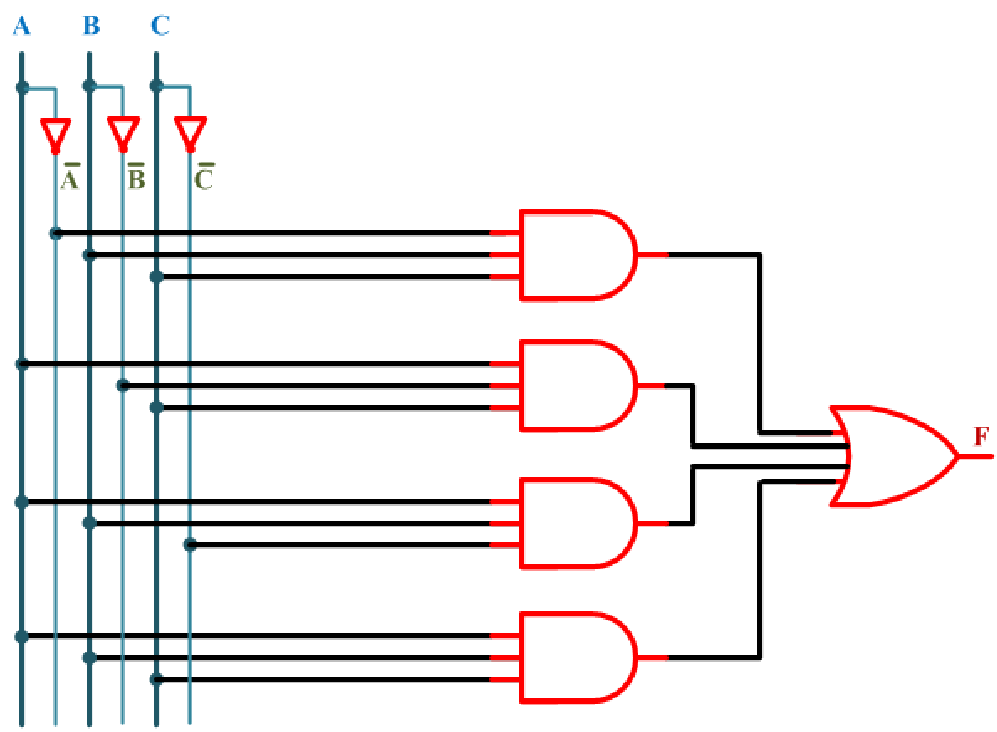
- la fonction **F(A,B,C)** est à l'état **0** pour les combinaisons **0**, **1**, **2** et **4**. On l'écrit sous la forme numérique : **F(A,B,C) =I(0,1,2,4)** (c'est-à-dire intersection des combinaisons 0, 1, 2 et 4). D'où la deuxième forme canonique de F :

$$\boxed{\mathbf{F = (A + B + C).(A + B + \bar{C}).(A + \bar{B} + C).(\bar{A} + B + C)}}$$

1.3 Représentation sous forme d'un logigramme

Représenter une fonction logique sous la forme d'un logigramme revient à réaliser son schéma de câblage à l'aide de portes logiques.

Exemple : La fonction **F(A,B,C)** indiquée ci-dessus peut être représentée par le logigramme suivant (en utilisant sa première forme canonique $\mathbf{F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC}$) :



1.4 Représentation sous forme d'un tableau de KARNAUGH

Le diagramme de KARNAUGH est un tableau qui permet, comme la table de vérité, la représentation graphique d'une fonction logique.

Pour une fonction à **n** variables, le tableau aura **2^n cases**. Chaque case correspond à une combinaison des variables d'entrée et elle représente la valeur de la fonction pour cette combinaison.

On utilise le code Gray pour effectuer les combinaisons afin d'éviter le changement de plusieurs variables lors du passage d'une case à une autre.

Cas de deux variables: (n=2)

A \ B	0	1
0	00 $\bar{A}\bar{B}$	01 $\bar{A}B$
1	10 $A\bar{B}$	11 AB

Cas de trois variables: (n=3)

A \ BC	00	01	11	10
0	000 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	001 $\bar{A}\bar{B}C$	011 $\bar{A}BC$	010 $\bar{A}B\bar{C}$
1	100 $A\bar{B}\bar{C}$	101 $A\bar{B}C$	111 ABC	110 $AB\bar{C}$

Cas de quatrevariables : (n=4)

AB \ CD	00	01	11	10
00	0000 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	0001 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	0011 $\bar{A}\bar{B}CD$	0010 $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
01	0100 $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	0101 $\bar{A}B\bar{C}D$	0111 $\bar{A}BCD$	0110 $\bar{A}BC\bar{D}$
11	1100 $AB\bar{C}\bar{D}$	1101 $AB\bar{C}D$	1111 $ABCD$	1110 $ABC\bar{D}$
10	1000 $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	1001 $A\bar{B}\bar{C}D$	1011 $A\bar{B}CD$	1010 $A\bar{B}C\bar{D}$

Exemple :

Soit à établir le tableau de KARNAUGH relatif à la fonction **F(A,B,C) =R(3,5,6,7)**et le remplir à partir de sa table de vérité.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pour chaque combinaison des variables **ABC** de la table de vérité, on cherche la case équivalente dans le tableau de KARNAUGH et on la rempli par la valeur correspondante de **F.**

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

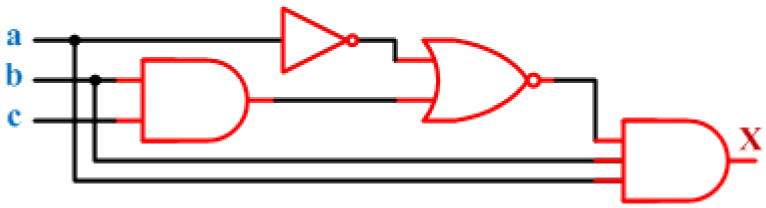
F

2. Simplification des fonctions logiques :

2.1 Introduction :

Dès qu'on dispose de l'expression d'un circuit logique, il est possible de le minimiser pour obtenir une équation comportant moins de termes ou moins de variables par termes. Cette nouvelle équation peut alors servir de modèle pour construire un circuit équivalent au circuit original mais qui requiert moins de portes et de raccordements.

A titre d'exemple, considérons le circuit suivant :



On en déduit l'équation de **X**

$$X = (\bar{a} + bc)ab$$

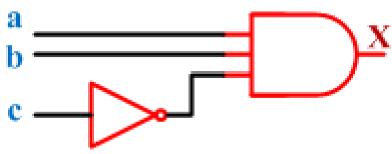
On peut simplifier cette équation logique pour obtenir une expression réduite et un circuit (logigramme) plus simple :

$$X = (\bar{a} + bc)ab$$

$$= a(\overline{bc})ab$$

$$= (\bar{b} + \bar{c})ab$$

$$= ab\bar{c}$$



$$X = ab\bar{c}$$

La simplification des fonctions logiques a donc pour objectif de minimiser le nombres de termes ce qui permet une réalisation matérielle plus fiable, moins couteuse et plus facile à construire et à dépanner.

Deux méthodes de simplification sont utilisées :

- La simplification **algébrique**.
- La simplification graphique pa**r tableau de KARNAUGH**.

2.2 Simplification algébrique :

Cette méthode est basée sur l'utilisation des propriétés et des théorèmes de l'algèbre de BOOLE (voir le chapitre 2).

Exemple :

Simplifier algébriquement la fonction $\mathbf{F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC}$:

On peut écrire l'équation de **F** sous la forme :

$$\mathbf{F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC + ABC + ABC}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F = BC(\overline{A} + A) + AC(\overline{B} + B) + AB(\overline{C} + C)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F = BC + AC + AB}$$

D'où une expression simplifiée de F :

$$\boxed{\mathbf{F = AB + C(A + B)}}$$

Avec la simplification algébrique, il n'est pas toujours facile de savoir quel théorème utiliser pour obtenir le résultat minimal. D'ailleurs, rien ne nous dit que l'expression simplifiée est la forme minimale et qu'il n'y a pas d'autres simplifications possibles.

On utilise donc, le diagramme de KARNAUGH, qui est un outil graphique permettant de simplifier de manière méthodique une équation logique.

2.3 Simplification graphique par tableau de KARNAUGH :

Cette méthode consiste à :

- Représenter le tableau de KARNAUGH en tenant compte du nombre des variables d'entrée de la fonction à simplifier.
- Remplir chaque case de ce tableau par la valeur correspondante de la fonction (**0** ou **1**).
- Faire des groupements de cases adjacentes tout en respectant les règles suivantes :
  - ➢ un groupement est formé uniquement par des cases qui contiennent la valeur **1**,
  - ➢ le nombre de cases par groupement doit être une puissance de **2** (1, 2, 4, 8…),
  - ➢ chaque groupement doit contenir le maximum possible de **1**,
  - ➢ il faut respecter les axes de symétrie en formant un groupement.
  - ➢ un groupement a la forme rectangulaire (ou carrée),
  - ➢ un **1** peut appartenir à un ou plusieurs groupements,
- Déterminer l'équation logique de chaque groupement et de la fonction.

Déterminer l'équation relative à un groupement revient à déterminer sa surface en tenant compte, sur ses deux côtés, seulement des variables qui n'ont pas changé d'état

Dans la suite on donne quelques exemples relatifs à différentes situations :

- Un groupement de **1** case = $\mathbf{2^0}$ =>**0** variable simplifiée (éliminée).

✓ Cas de **deux** variables

A \ B	0	1
0	0	1
1	1	0

F

$\mathbf{F} = \bar{A}B + A\bar{B}$

✓ Cas de **trois** variables

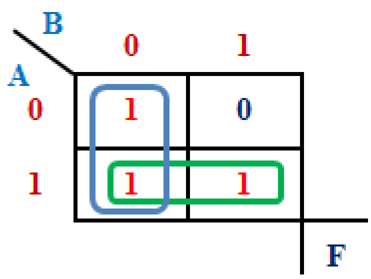
A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	0	1	0

F

$\mathbf{F} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + ABC$

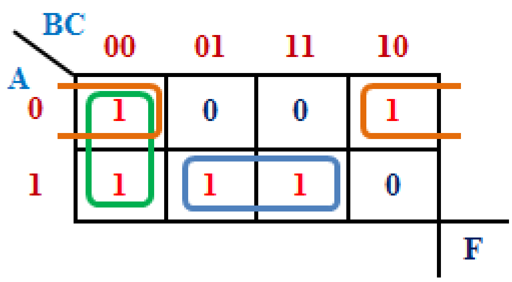
- Un groupement de **2** cases = **2^1** =>**1** variable simplifiée

✓ Cas de **deux** variables



$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{\overline{B}}$

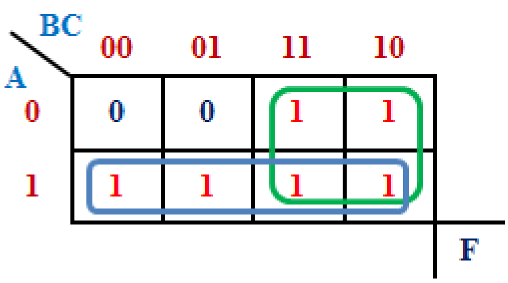
✓ Cas de **trois** variables



$\mathbf{F} = \mathbf{\overline{B}\overline{C}} + \mathbf{AC} + \mathbf{\overline{A}\overline{C}}$

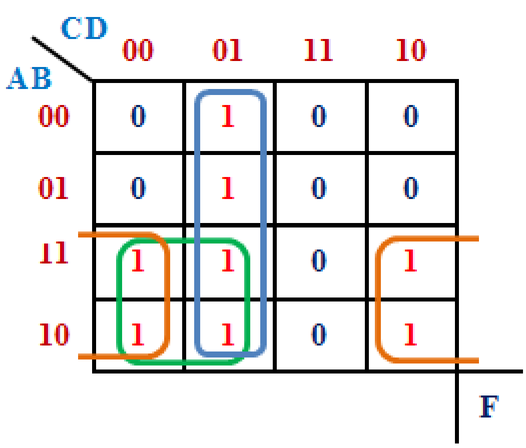
- Un groupement de **4** cases = **2^2** =>**2** variables simplifiées

✓ Cas de **trois** variables



$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

✓ Cas de **quatre** variables



$\mathbf{F} = \mathbf{A\overline{C}} + \mathbf{\overline{C}D} + \mathbf{A\overline{D}}$

- Un groupement de **8** cases = 2^3 =>**3** variables simplifiées

✓ <u>Cas de **trois** variables</u>

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

F

$\mathbf{F = 1}$

✓ <u>Cas de **quatre** variables</u>

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

F

$\mathbf{F = \bar{A} + D}$

<u>Exemple</u> :

Simplifier graphiquement la fonction $\mathbf{F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC}$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

F

$\mathbf{F = AB + AC + BC}$

C'est le même résultat que celui obtenu par la méthode algébrique.

3. Exercice d'application :

Soit la fonction **F(A,B,C,D) =R(0,2,4,5,8,10,11,12,13)**:

a) Etablir la table de vérité de cette fonction.

b) Ecrire la première et la deuxième forme canonique de F.

c) Simplifier algébriquement l'expression de F (première forme canonique).

d) Etablir le logigramme relatif à l'expression simplifiée.

e) Simplifier graphiquement l'expression de F.