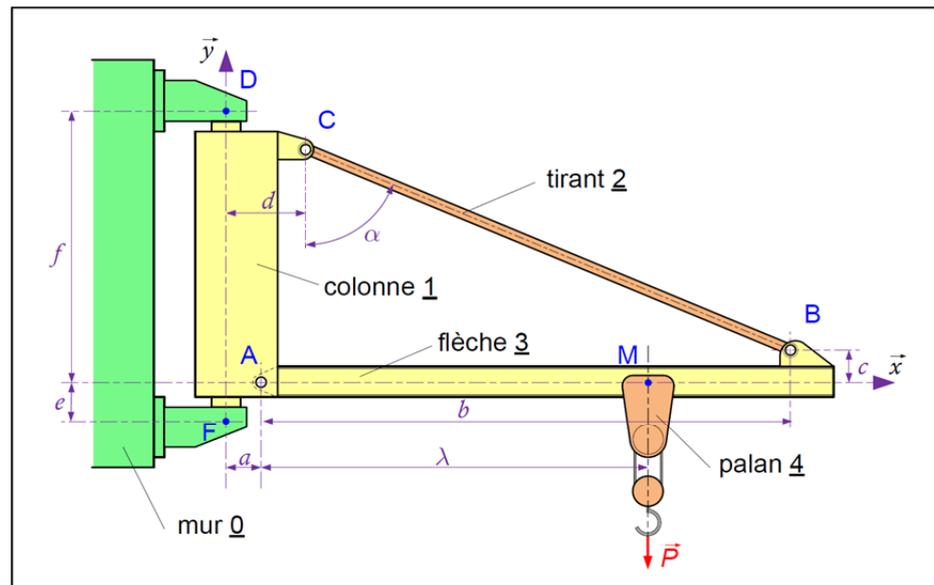


Support de cours:

Résistance des Matériaux.

Réalisé par :

- ➡ *Ben Hassine Houda.*
- ➡ *Amdouni Hatem.*
- ➡ *Hajbrahim Fawzi.*
- ➡ *Kalleli Safiedine*



Destiné pour:

Premier niveau LMD .

Génie mécanique.

Table des matières :

<i>Liste des figures.</i>	5
<i>Chapitre I . Introduction à la résistance des matériaux.</i>	7
I. But de la résistance des matériaux .	8
II. Hypothèses générales .	8
II.1. Hypothèses sur le matériau.	8
II.2. Hypothèses sur les poutres.	8
II.3. Hypothèses sur les efforts extérieurs.	9
II.4. Domaine de validité de la résistance des matériaux.	9
III. Les efforts dans les poutres .	9
III.1. Modélisation des liaisons .	9
III.2. Les charges .	10
<i>Chapitre II . Tenseur de cohésion.</i>	11
I. Introduction.	12
II. Détermination du tenseur de cohésion .	12
II.1. Etude de l'équilibre de la poutre .	13
II.2. Composantes du tenseur de cohésion .	13
III. Notion de contrainte .	14
III.1. Vecteur contrainte .	14
III.2. Contrainte normale et contrainte tangentielle .	15
IV. Identification de la nature des sollicitations .	15
IV.1. Sollicitations simples .	15
IV.2. Sollicitations composées .	16
V. Application .	16
V.1. Enoncé .	17
V. 2. Corrigé .	17
<i>Chapitre III : Traction et compression.</i>	19
I. Introduction .	20
Définition . Traction/compression.	20
II. Essai de traction.	20
II.1. But et principe .	20

II.2. caractéristiques mécaniques .	22
III. Etude des déformations .	22
IV. Contraintes en traction-compression .	22
V. Condition de résistance .	23
VI. Condition de rigidité .	23
VII. Phénomène de concentration de contrainte .	23
VII. Application .	25

Chapitre IV : Cisaillement simple.	26
---	-----------

I. Introduction .	27
II. Essai de cisaillement .	27
III. Etude des déformations en cisaillement .	28
IV. Etude de contrainte en cisaillement .	29
V. Condition de résistance au cisaillement .	29
VI. Application .	30

Chapitre V :Torsion simple.	31
------------------------------------	-----------

I. Introduction .	32
II. Essai de torsion simple .	32
II.1. Principe .	32
II.2. Résultats .	33
III. Etude des déformations .	33
IV. Etude des contraintes .	34
IV.1.Relation entre contrainte et moment de torsion .	34
V. Condition de résistance.	35
VI. Condition de rigidité .	35
VII. Concentration de contraintes .	36

Chapitre VI : Flexion simple.	37
--------------------------------------	-----------

I. Introduction .	38
II. Essai de flexion .	38
III. Répartition des contraintes .	39
IV. Condition de résistance à la flexion	40
V. Concentration de contraintes .	40
VI. Déformation en flexion .	42

VII. Condition de rigidité en flexion .	42
Chapitre VII : Principe de superposition.	43
I. Introduction .	44
II. Principe de superposition .	44
II.1. Enoncé.	44
II.2. Limites du théorème de superposition.	44
III. Application du principe de superposition au dimensionnement d'un poutre soumise a une sollicitation composée . problème de flexion/traction.	44
IV. Application du principe de superposition a la résolution d'un problème hyperstatique .	45
IV.1. Isostatisme - Hyperstatisme .	45
IV.2. Utilisation du principe de superposition .	45
Chapitre VIII : Sollicitations composées.	47
I. Introduction .	48
II. Flexion - Torsion .	48
II.1. Définition .	48
II.2. Moment idéal de flexion .	48
II.3. Condition de résistance .	48
II.4. Déformation .	49
III. Traction - torsion .	49
III.1. Définition .	49
III.2. Contrainte idéale .	49
III.3. Condition de résistance	49
IV. Torsion – cisaillement .	50
IV.1. Définition .	50
IV.2. Calcul de contraintes et Condition de résistance .	50
V. Flexion et traction .	50
Chapitre IX : Flambement des poutres comprimées.	52
I. Introduction .	53
II. Phénomène de flambement.	53
III. Charge critique d'Euler .	53
IV. Elancement .	54

V.	Contrainte critique .	55
VI.	Condition de résistance .	56
	VI.1. Coefficient de sécurité k .	56
	VI.2. Condition de résistance .	57
VII.	Critère de résistance	57
VIII.	Application .	44

Bibliographie	59
----------------------	-----------

<u>Liste des figures :</u>	<u>Pages</u>
<i>Figure 1.1 : Modélisation d'une poutre droite.</i>	8
<i>Figure 1.2 : Symbole et modélisation d'une liaison encastrement.</i>	9
<i>Figure 1.3 : Symbole et modélisation d'une liaison rotule.</i>	10
<i>Figure 1.4 : Symbole et modélisation d'une liaison appui-simple.</i>	10
<i>Figure 2.1 : Illustration d'une coupe fictive sur une poutre.</i>	12
<i>Figure 2.2 : Les composantes du torseur de cohésion.</i>	14
<i>Figure 2.3 : Zoom local sur un point M de la coupure.</i>	14
<i>Figure 3.1 : Poutre sollicitée en traction</i>	20
<i>Figure 3.2 : Allongement d'une éprouvette sollicitée en traction</i>	21
<i>Figure 3.3 : Courbe contrainte - déformation dans un essai de traction</i>	21
<i>Figure 3.4 : Répartition uniforme des contraintes.</i>	22
<i>Figure 3.5 : Coefficient de concentration de contrainte k_t.</i>	24
<i>Figure 4.1 : Modélisation d'une éprouvette sollicitée au cisaillement.</i>	27
<i>Figure 4.2 : Poutre sollicitée en cisaillement.</i>	28
<i>Figure 4.3 : courbe de $F=f(\Delta y)$.</i>	28
<i>Figure 4.4 : Glissement transversale Δy</i>	28
<i>Figure 5.1 : Moments des actions extérieures appliqués à de la poutre.</i>	32
<i>Figure 5.2 : Illustration de l'essai de torsion simple.</i>	33
<i>Figure 5.3 : courbe $M_t=f(\alpha)$</i>	33
<i>Figure 5.4 : Répartition des contraintes au niveau de la section.</i>	34
<i>Figure 5.5 : Moment quadratique polaire en fonction de la section.</i>	35
<i>Figure 5.6: Coefficient de concentration de contraintes K en Torsion simple.</i>	36
<i>Figure 6.1: Modélisation des efforts extérieurs sur une poutre soumise à une flexion simple</i>	38
<i>Figure 6.2: Modélisation d'un essai de flexion trois points.</i>	39
<i>Figure 6.3: Définition de l'angle $\Delta \phi$.</i>	39
<i>Figure 6.4: Répartition des contraintes dans une section droite</i>	39
<i>Figure 6.5: Coefficient de concentration de contraintes K en flexion simple.</i>	41
<i>Figure 6.6 : Définition de la déformée.</i>	42
<i>Figure 7.1.a : problème de flexion/traction.</i>	44
<i>Figure 7.1.b : problème de flexion simple</i>	44
<i>Figure 7.1.c : problème de traction simple.</i>	44
<i>Figure 7.2: Décomposition d'un problème hyperstatique.</i>	45

<i>Figure 8.1 : Sollicitation en Flexion-Torsion</i>	48
<i>Figure 8.2 : Sollicitation en Traction - torsion</i>	49
<i>Figure 8.3 : Sollicitation en Torsion – cisaillement</i>	50
<i>Figure 8.4 : Contrainte normales résultantes pour une sollicitation en flexion et traction</i>	51
<i>Figure 9.1 : Flambement.</i>	53
<i>Figure 9.2 : poutre de longueur L et rectiligne soumise en A et B à deux glisseurs directement opposés, qui augmentent progressivement.</i>	53
<i>Figure 9.3 : $M_f = F y$</i>	53
<i>Figure 9.4 : Différentes configurations pour le calcul de la longueur libre de flambage.</i>	55

Chapitre I :

Introduction à la résistance des matériaux.

<i>Objectif</i>	Comprendre les objectifs généraux de la RDM et les hypothèses de travail.
<i>Pré-requis</i>	Modélisation des actions mécaniques. Principe fondamental de la statique.
<i>Eléments de contenu</i>	But de la RDM. Hypothèses générales.

I. But de la résistance des matériaux :

La résistance des matériaux (RdM) étudie le comportement du solide déformable. Elle s'intéresse particulièrement au calcul des dimensions des systèmes mécaniques pour qu'ils soient en mesure de supporter les efforts qui leur sont appliqués pendant leur service dans les conditions de sécurité requise.

II. Hypothèses générales :

Ces hypothèses concernent essentiellement les matériaux utilisés, la forme des solides étudiés et le type d'action mécanique exercée.

II.1. Hypothèses sur le matériau:

- L'homogénéité, l'isotropie et la continuité du matériau : On suppose que le matériau a les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions et que le matériau est assimilé à un milieu continu (pas de défaut macroscopique tels que fissures, criques)
- L'élasticité et la linéarité du matériau : On suppose qu'en chaque point contraintes et déformation sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initiale.

II.2. Hypothèses sur les poutres :

1. Définition :

Nous appelons poutre un solide dont une des dimensions est grande vis-à-vis de deux autres et qui est soumis à un système de sollicitation qui le fait fléchir ou le déformer.

2. Géométrie :

Une poutre est en général un solide engendré par une aire plane (S) dont le centre de gravité (G) décrit une courbe (C). Le plan de l'aire (S) reste normal à la courbe (C).

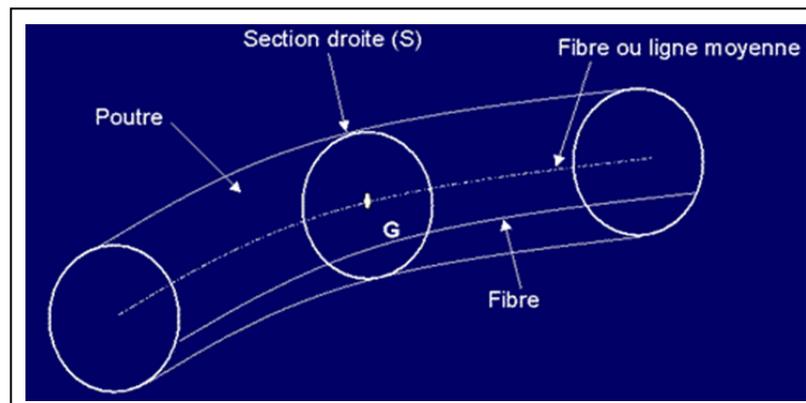


Figure 1.1 : Modélisation d'une poutre droite .

- L'aire de la section (S) est appelée section droite ou section normale de la poutre.

- La courbe (C) est appelée fibre moyenne de la poutre, si la fibre moyenne est une droite, la poutre est dite droite.
- Le rayon de courbure de la fibre moyenne est suffisamment grand par rapport à la dimension transversale de la poutre.

II.3. Hypothèses sur les efforts extérieurs :

- Toute action mécanique est représentée par un torseur en un point. Ces actions peuvent être concentrées ou réparties, exercées à distance ou en contact.
- Les efforts extérieurs sont situés dans le plan de symétrie de la poutre ou disposés symétriquement par rapport à ce plan.

II.4. Domaine de validité de la résistance des matériaux :

- Hypothèse des petites déformations : Les déformations dues aux charges sont négligeables par rapport aux dimensions des composants étudiés.
- Hypothèse de Navier-Bernoulli (hypothèse des sections planes) : les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la déformation.
- Hypothèse de Saint Venant : Les contraintes (et par suite les déformations qui leur sont liées par la loi de Hooke), dans une région éloignée des points d'application d'un système de forces, ne dépendent que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces.

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à des solutions approchées qui permettent en général une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

III. Les efforts dans les poutres :

III.1. Modélisation des liaisons :

La norme voudrait que l'on utilise les mêmes symboles que dans les schémas cinématiques. Cependant la pratique et notamment les logiciels spécifiques à la RDM utilisent fréquemment les représentations suivantes :

- **Liaison encastrement** : cette liaison reliant la poutre à une pièce considérée comme fixe, on représente une liaison encastrement par le symbole de la masse.

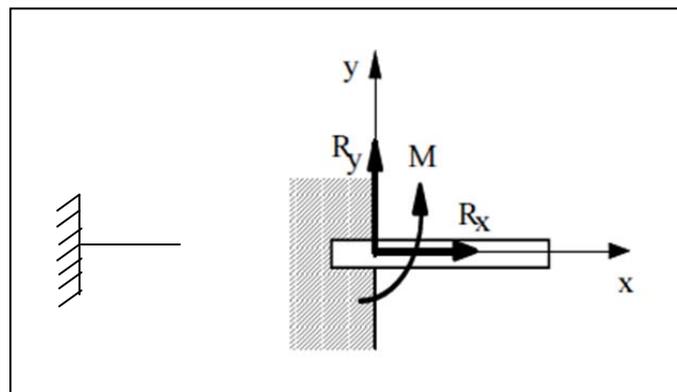


Figure 1.2 : Symbole et modélisation d'une liaison encastrement.

Ce type d'appui introduit donc 3 inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du Moment M perpendiculaire au plan moyen.

- **Liaison rotule** (appui ou articulation) : cette liaison est très fréquente. Elle peut correspondre à la liaison de la poutre avec un roulement à une rangée de billes muni de ses arrêts axiaux (éventuellement elle est susceptible de représenter aussi un appui simple).

L'articulation introduit 2 inconnues, par projection sur deux directions du plan moyen.

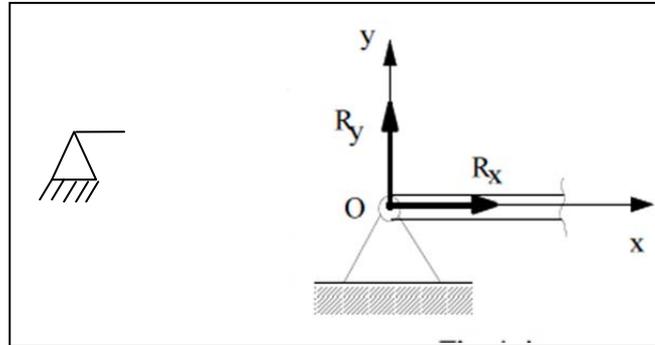


Figure 1.3 : Symbole et modélisation d'une liaison rotule.

- **Liaison appui-simple** (ou sphère cylindre) : la encore cette liaison est fréquente puisqu'elle est réalisé par exemple à partir d'un roulement à une rangée de billes non bloqué axialement. L'appui simple introduit une seule inconnue dans l'étude de la poutre.

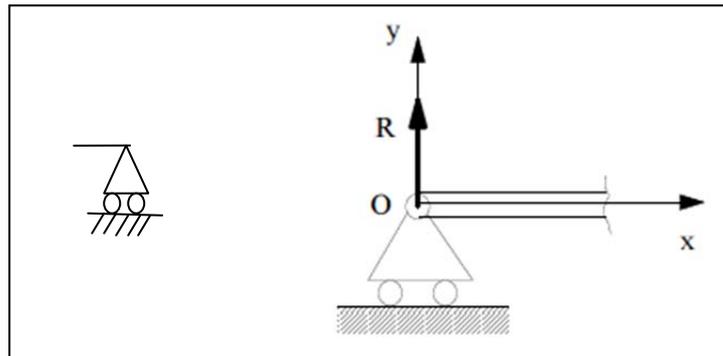


Figure 1.4 : Symbole et modélisation d'une liaison appui-simple.

III.2. Les charges :

En théorie des poutres, on distingue en général deux types de charges :

- Les **charges concentrées** qui s'appliquent en un point de la poutre et définie par un torseur en ce point d'application. . Si ce torseur se réduit à une résultante, on l'appelle **force concentrée**. Si ce torseur se réduit à un couple (ou un moment) on l'appelle **moment concentré**.
- Les **charges réparties** qui sont distribuées continûment le long d'un segment de la poutre et sont représentées par un champs de vecteurs uniforme ou non.

Chapitre II :

Torseur de cohésion.

Objectif Déterminer le torseur de cohésion le long d'une poutre.
Déterminer la nature des sollicitations dans une poutre.
Traçage des diagrammes de sollicitations.

Pré-requis Modélisation des actions mécaniques.
Principe fondamental de la statique.

Éléments de contenu Efforts intérieurs
Composantes du torseur de cohésion.
Notion de contrainte

I. Introduction :

Les efforts intérieurs ou de cohésion sont les efforts qui agissent à l'intérieur des poutres et qui assurent l'équilibre ou la cohésion de la structure sous l'action des charges extérieures exercées. La connaissance de ces efforts de cohésion nous renseignera sur l'état de sollicitation de la poutre étudiée, et permettra d'évaluer sa résistance aux efforts qui lui sont appliqués.

II. Détermination du torseur de cohésion :

Pour mettre en évidence les efforts transmis par la matière au niveau d'une section droite d'une poutre, nous effectuons une coupure imaginaire par un plan perpendiculaire à la fibre moyenne. Ce plan définit une section S de barycentre G qui divise la poutre en deux tronçons fictifs (AG et GB). Chaque tronçon est en équilibre et l'application du Principe Fondamental de la statique, à l'un ou à l'autre, permet d'identifier et de calculer les efforts intérieurs exercés entre les deux tronçons au niveau de la coupure.

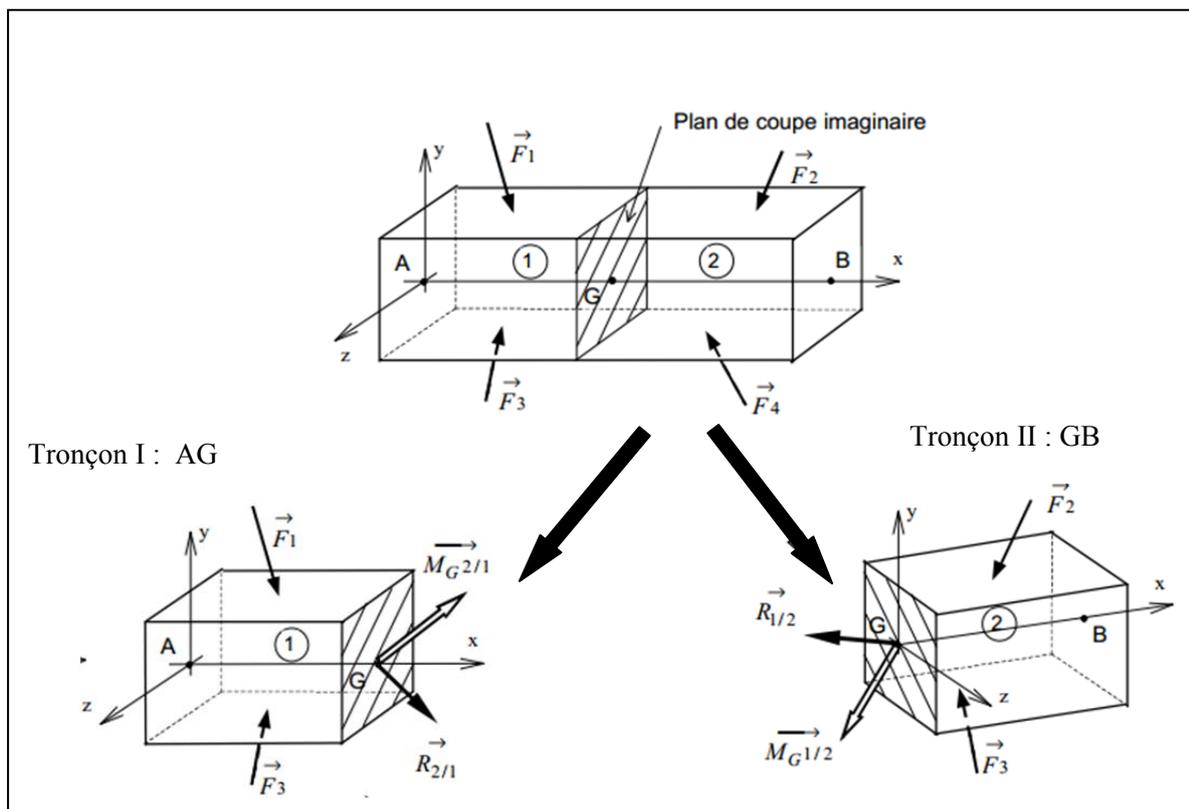


Figure 2.1 : Illustration d'une coupe fictive sur une poutre.

Les actions mécaniques entre les deux tronçons sont les efforts intérieurs à la poutre que l'on peut modéliser par un torseur appelé torseur de cohésion $\{\tau_{CohII/I}\}_G$ et dont les éléments de réduction au point G centre de surface sont :

- Une résultante \vec{R}
- Un moment résultant \vec{M}_G

$$\{\tau_{CohII/I}\}_G = \{\tau_{Efforts_intérieurs}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}$$

Deux conventions d'écriture sont possibles :

- Convention 1 : Le torseur de cohésion modélise les actions mécaniques de la partie (2) sur la partie (1) .
- Convention 2 : Le torseur de cohésion modélise les actions mécaniques de la partie (1) sur la partie (2) .

II.1. Etude de l'équilibre de la poutre :

L'équilibre du tronçon I **ou de la partie gauche** se traduit par :

$$\{\tau_{Coh}\}_G + \{\tau_{ext \rightarrow 1}\}_G = \{\vec{0}\}$$

$$\text{Avec : } \{\tau_{ext \rightarrow 1}\}_G = \{\tau_{\vec{F}_{1 \rightarrow 1}}\}_G + \{\tau_{\vec{F}_{3 \rightarrow 1}}\}_G$$

Ce qui permet de déduire que : $\{\tau_{coh}\}_G = -\{\tau_{actions\mécaniques\à\gauche}\}_G$

Comme L'équilibre de la poutre se traduit par :

$$\{\tau_{actions\mécaniques\à\droite}\}_G + \{\tau_{actions\mécaniques\à\gauche}\}_G = \{\vec{0}\}$$

On peut déduire que :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \{\tau_{actions\mécaniques\à\droite}\}_G$$

Finalement, le torseur de cohésion au centre de surface G d'une surface droite de poutre se définit en effectuant la somme des torseurs, au même point G, des actions mécaniques agissant soit à gauche de la section droite, somme précédée du signe : « - », soit à droite de la section droite, somme précédée du signe « + ».

Cette relation permet de simplifier le calcul du torseur de cohésion dans le cas où le torseur des actions mécaniques à droite est plus simple à déterminer.

Chaque tronçon est en équilibre et l'application du PFS, à l'un ou à l'autre, permet de faire apparaître et de calculer le torseur de cohésion au niveau de la coupure.

II.2. Composantes du torseur de cohésion :

Les composantes du torseur de cohésion se notent conventionnellement comme ci-dessous :

$$\{\tau_{Coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} N \quad M_t \\ T_y \quad M_{fy} \\ T_z \quad M_{fz} \end{array} \right\}_G$$

Avec :

N : Effort normal

Ty : Effort tranchant suivant l'axe (G,y)

Tz : Effort tranchant suivant l'axe (G,z)

Mt : Moment de torsion

Mfy : Moment fléchissant suivant l'axe (G,y).

Mfz : Moment fléchissant suivant l'axe (G,z)

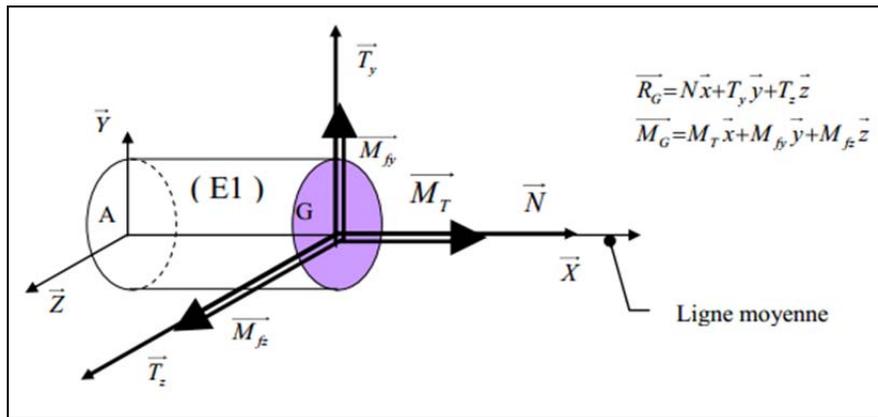


Figure 2.2 : Les composantes du torseur de cohésion.

III. Notion de contrainte :

III.1. Vecteur contrainte :

Le torseur de cohésion permet de modéliser les efforts intérieurs au point G centre de la section droite mais ce torseur ne représente qu'une vision globale de toutes les actions mécaniques qui s'appliquent localement en chaque point de la section droite.

Pour représenter ces actions mécaniques, on considère un point M de la surface S. Autour de ce point M, on considère un élément de surface dS de normale \vec{n}

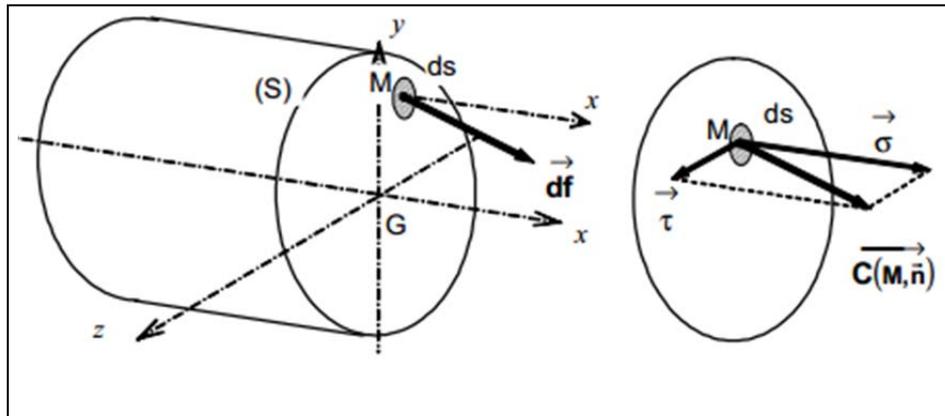


Figure 2.3 : Zoom local sur un point M de la coupure.

Les efforts intérieurs exercés sur dS sont une densité surfacique d'efforts ou densité de force par unité de surface.

Cette densité surfacique d'effort est caractérisée par le vecteur contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$.

Les actions mécaniques s'exerçant sur la surface sont donc $d\vec{F} = \vec{C}(M, \vec{n}) dS$.

L'unité du vecteur contrainte est le rapport d'une force par unité de surface soit N/m^2 ou Pa.

III.2. Contrainte normale et contrainte tangentielle :

On définit les contraintes normales et tangentielle respectivement la projection de $\vec{C}(M, \vec{n})$ sur la normale \vec{n} , et la projection de $\vec{C}(M, \vec{n})$ sur le plan de l'élément de surface dS : $\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma\vec{n} + \tau\vec{t}$

σ : Contrainte normale.

τ : Contrainte tangentielle

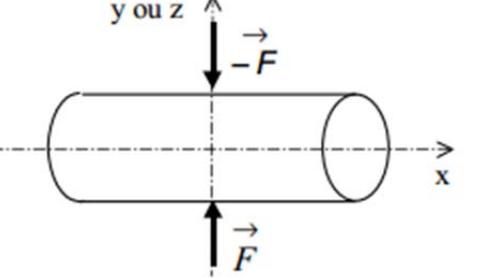
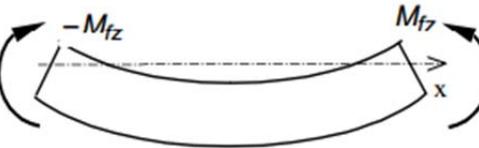
\vec{n} : Vecteur normale à l'élément de surface dS

\vec{t} : Vecteur tangent à l'élément de surface dS

IV. Identification de la nature des sollicitations :

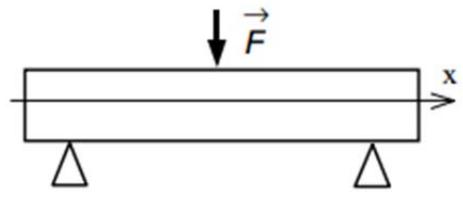
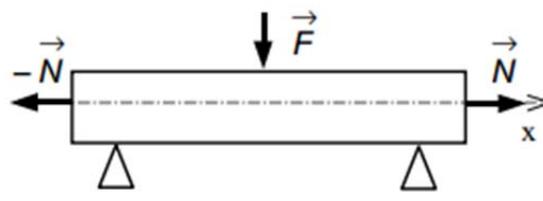
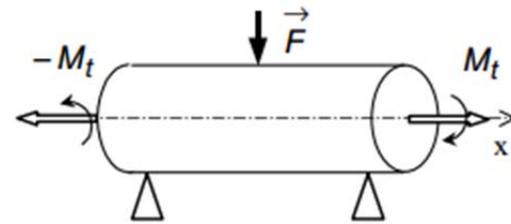
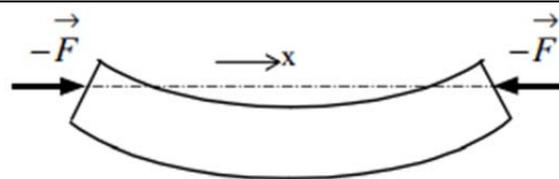
IV.1. Sollicitations simples :

Si une seule composante N , T , M_T ou M_f existe, alors que toutes les autres sont nulles, on dit que l'on a une sollicitation simple.

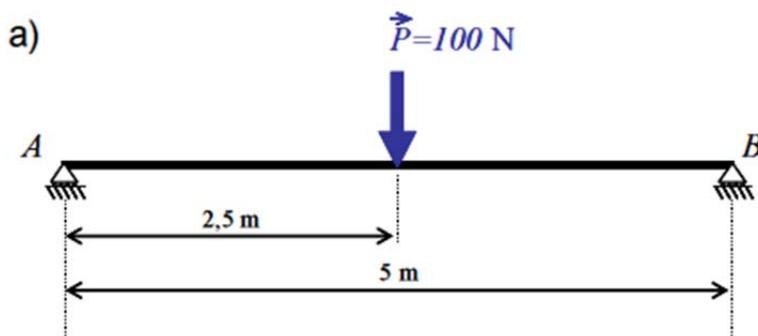
Torseur de cohésion	Sollicitation	Exemple
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	TRACTION (pour la compression, les vecteurs forces sont en sens inverse)	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$	CISAILLEMENT	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	TORSION	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	FLEXION PURE	

IV.2. Sollicitations composées :

Si deux composantes au moins sont non nulles, on dit que l'on a une sollicitation composée.

Torseur de cohésion	Sollicitation	Exemple
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	FLEXION PLANE SIMPLE	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	FLEXION + TRACTION	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	FLEXION + TORSION	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	FLAMBAGE	

V. Application :

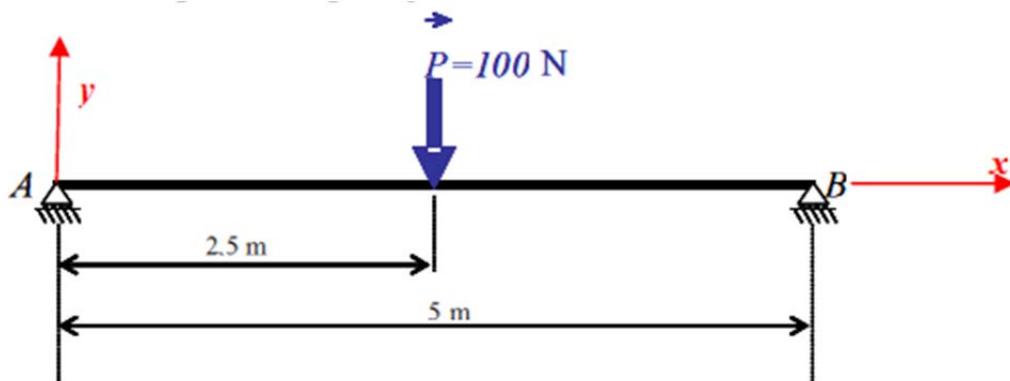


V.1. Énoncé :

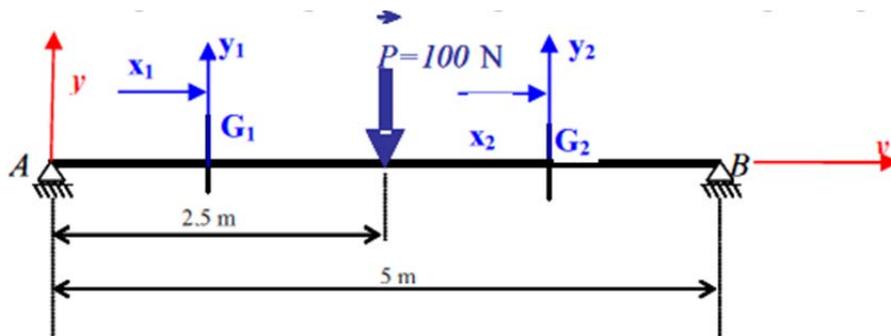
1. Identifier les liaisons présentes sur la poutre
2. Mettre en place le repère général,
3. Déterminer les efforts transmis par les liaisons,
4. Déterminer le nombre de tronçons nécessaires à l'étude de la poutre en RdM,
5. Mettre en place les coupures, et les repères associés à chaque coupure,
6. Déterminer le torseur de cohésion dans chaque tronçon ,
7. Tracer les diagrammes de sollicitations.

V. 2. Corrigé :

1. Liaisons ponctuelles.
- 2.



3. Déterminer les efforts transmis par les liaisons :
4. L'action P est centrée sur la poutre donc les réactions en A et B sont égales à $P/2$, soit 50 N et dirigées suivant y .



5. Deux tronçons sont nécessaires à l'étude de la poutre en RdM : AC et CB.

• **Tronçon AC :**

Méthode algébrique :

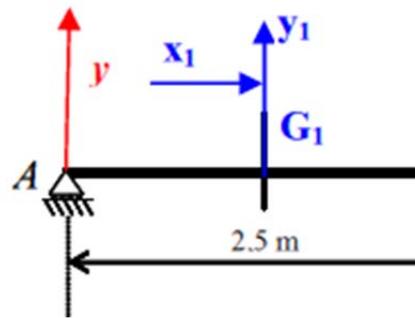
T_{y1} = réaction à gauche

$T_{y1} = -Y_A = -50$

$M_{fz1} = 50x$

Méthode vectorielle :

$$\{\tau_{coh}\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{c} -\vec{A} \\ -\vec{G_1A} \wedge \vec{A} \end{array} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -Y_A & 0 \\ 0 & x_1 Y_A \end{array} \right\}$$



• **Tronçon CB :**

Méthode algébrique :

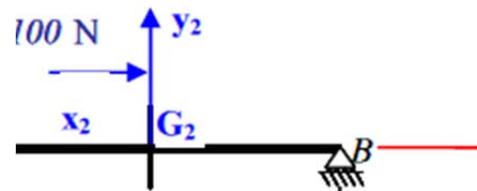
T_{y2} = réaction à droite

$T_{y1} = Y_B = 50$

$M_{fz1} = 50(5-x)$

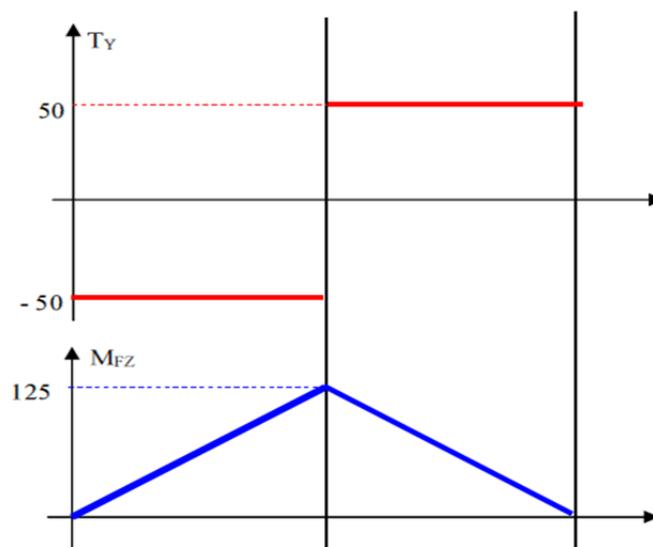
Méthode vectorielle :

$$\{\tau_{coh}\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{B} \\ \vec{G_2B} \wedge \vec{B} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 50(5-x) \end{array} \right\}$$



6. Diagrammes de sollicitations :

x(m)	T_y (N)	M_{fz} (N.m)
0	-50	0
2,5	-50	125
5	50	0



Chapitre III :

Traction et compression.

<i>Objectifs</i>	Déterminer la répartition des contraintes dans une section de poutre sollicitée à la traction. Vérifier la condition de résistance et de rigidité pour une poutre sollicitée à la traction. Dimensionner une poutre sollicitée à la traction.
<i>Pré-requis</i>	Torseur de cohésion. Contrainte normale.
<i>Eléments de contenu</i>	Essai de traction, Déformations, Contraintes. Condition de résistance en traction. Condition de rigidité en traction. Concentration de contraintes

I. Introduction :

Définition : Traction/compression.

On dit qu'une poutre (E) travaille en extension simple (ou en compression simple) quand elle est soumise à deux forces axiales directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes qui tendent à l'allonger (ou à la raccourcir).

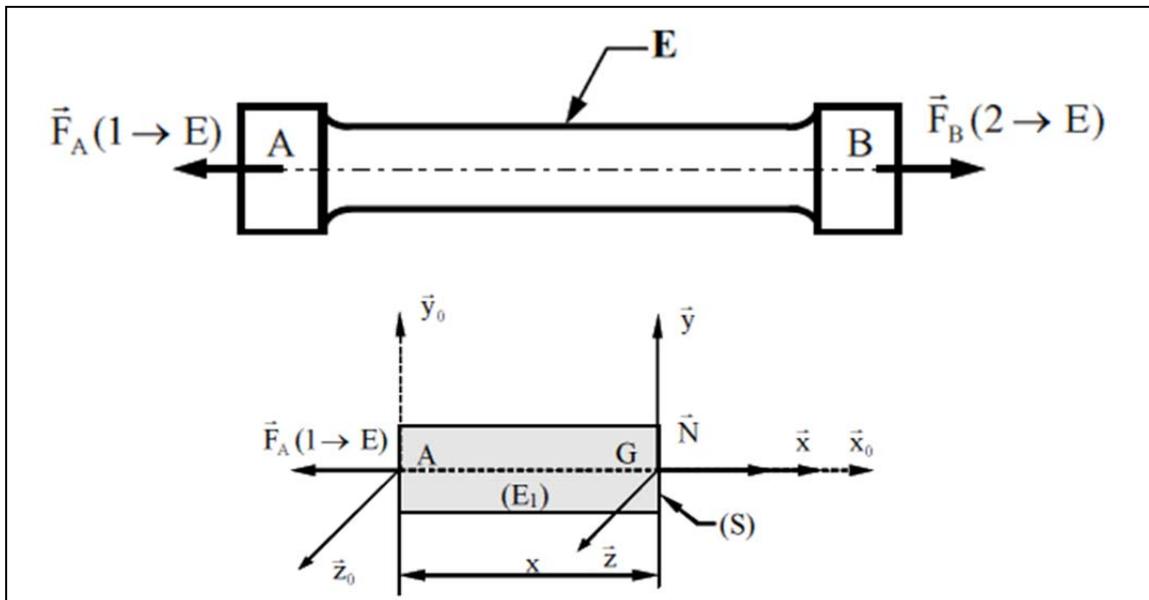


Figure 3.1 : Poutre sollicitée en traction.

Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} N \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} F \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_G$$

En Traction : $N > 0$

En compression $N < 0$.

II. Essai de traction.

II.1. But et principe :

Il permet de déterminer la Limite élastique et la Résistance à la rupture des différents matériaux. Il permet de définir les caractéristiques de résistance des matériaux.

Cet essai consiste à soumettre à 20°C une « éprouvette » de longueur l à un effort de traction, progressivement croissant, généralement jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

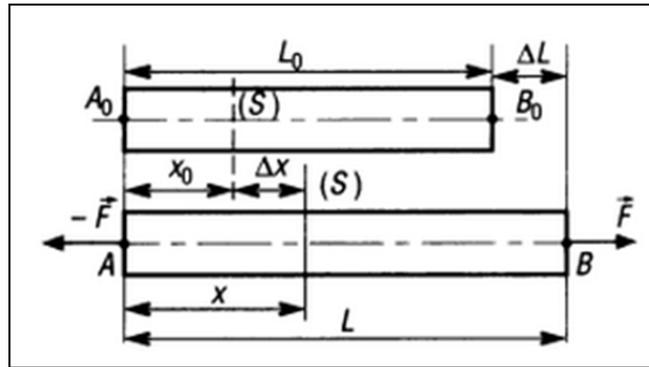


Figure 3.2 : Allongement d'une éprouvette sollicitée en traction

A chaque incrément d'effort, la contrainte normale et la déformation de la barre sont portées sur une courbe. Cette opération est effectuée régulièrement jusqu'à la rupture de la barre. On obtient ainsi la courbe contrainte - déformation caractérisant le matériau. Elle a généralement (de manière simplifiée) l'allure montrée sur la figure 3.3.

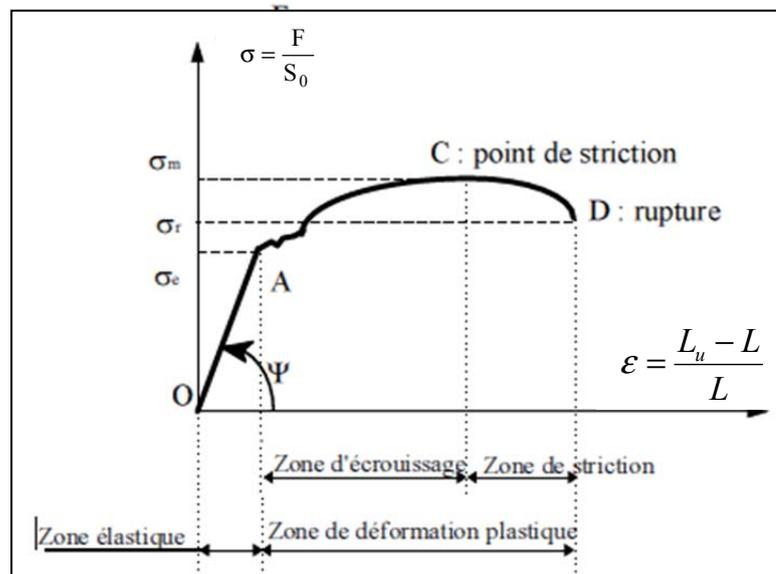


Figure 3.3 : Courbe contrainte - déformation dans un essai de traction

$\sigma = \frac{F}{S_0}$: Contrainte de traction [MPa]

F : effort de traction [N]

S_0 : section initiale de l'éprouvette [mm^2]

La partie (OA) est la partie élastique. La limite élastique n'est pas atteinte. La barre reprend sa forme initiale si l'expérience est interrompue dans cette zone. La pente E de la droite (OA) est appelée module d'élasticité linéaire ou module de Young .

La relation entre la contrainte et la déformation dans la zone élastique est donnée par la loi de Hooke: $\sigma = E\epsilon$

La partie (AB) est la partie plastique. La limite élastique est dépassée. Si l'expérience est interrompue (point C), la barre ne reprend pas sa forme initiale.

II.2. caractéristiques mécaniques :

Les caractéristiques mécaniques tirées de l'essai sont :

- Limite élastique : Elle peut être apparente (R_e ou σ_e) ou conventionnelle ($R_{e0,2}$)
- Module d'élasticité longitudinale ou module de Young : E .
- Résistance à la rupture : σ_r ou R_r .
- Contrainte maximale : σ_m ou R_m .
- Allongement : $A\% = \frac{L_u - L}{L} \times 100$

Après rupture l'éprouvette a une longueur ultime L_u avec L étant la longueur initiale.

III. Etude des déformations :

L'allongement Δx est le même pour tous les points d'une section droite (S) repérée par x .

Il s'en suit que l'allongement unitaire $\epsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$ (sans unité) est le même en tout point de section.

En général, on néglige la variation de la section, c'est à dire la déformation transversale (striction) : $\epsilon_y = -\nu \epsilon_x$, ν étant le coefficient de Poisson caractérisant le rapport entre l'allongement relatif de la poutre ϵ_x et la contraction latérale (raccourcissement) ϵ_y compris entre 0.3 et 0.5 pour les aciers.

IV. Contraintes en traction-compression :

Chaque élément de surface supporte un effort de traction parallèle à la ligne moyenne.

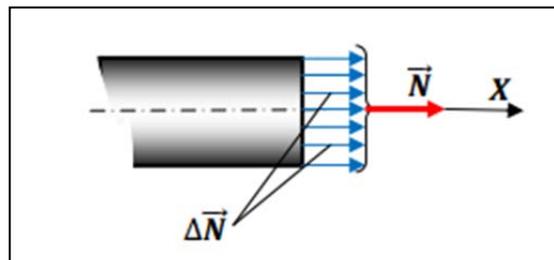


Figure 3.4 : Répartition uniforme des contraintes.

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\bar{C}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{x} \quad \text{et comme} \quad N = \iint_S \sigma \cdot dS = \sigma \cdot S, \quad \text{on aura :} \quad \sigma = \frac{N}{S}$$

$$N[N] ; S[mm^2] ; \sigma[MPa]$$

Cette relation peut éventuellement être algébrique. On obtiendra alors :

- une contrainte $\sigma < 0$ en compression.
- une contrainte $\sigma > 0$ en traction.

V. Condition de résistance :

Les contraintes développées dans les poutres doivent rester dans le domaine élastique.

En général, on adopte un coefficient de sécurité s .

La condition de résistance pour une contrainte normale d'extension est :

- En extension :
$$\sigma = \frac{N}{S} \leq R_{pe} = \frac{\sigma_e}{s}$$

On pose R_{pe} contrainte pratique à l'extension en [MPa]

- En compression :
$$\sigma = \frac{N}{S} \leq R_{pc} = \frac{\sigma_e}{s}$$

On pose R_{pc} : contrainte pratique à la compression en [MPa]

VI. Condition de rigidité :

Pour des raisons fonctionnelles (problèmes d'alignement d'appui, cahier des charges...), il est parfois important de limiter l'allongement. Il doit rester inférieur à une valeur limite $\Delta l < \Delta l_{lim}$.

D'après la loi de Hooke :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \\ \sigma = \frac{N}{S} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot S}$$

VII. Phénomène de concentration de contrainte :

Lorsqu'une poutre possède une variation brusque de sa section, les hypothèses de la Résistance des matériaux ne sont plus vérifiées. En traction, la répartition de la contrainte normale σ n'est plus uniforme. La valeur de la contrainte augmente au voisinage de ces singularités.

Pour rendre compte de cette augmentation, on multiplie la contrainte nominale par un coefficient k_t appelé coefficient de concentration de contraintes.

$$\sigma_{max} = k_t \cdot \sigma_{nom}$$

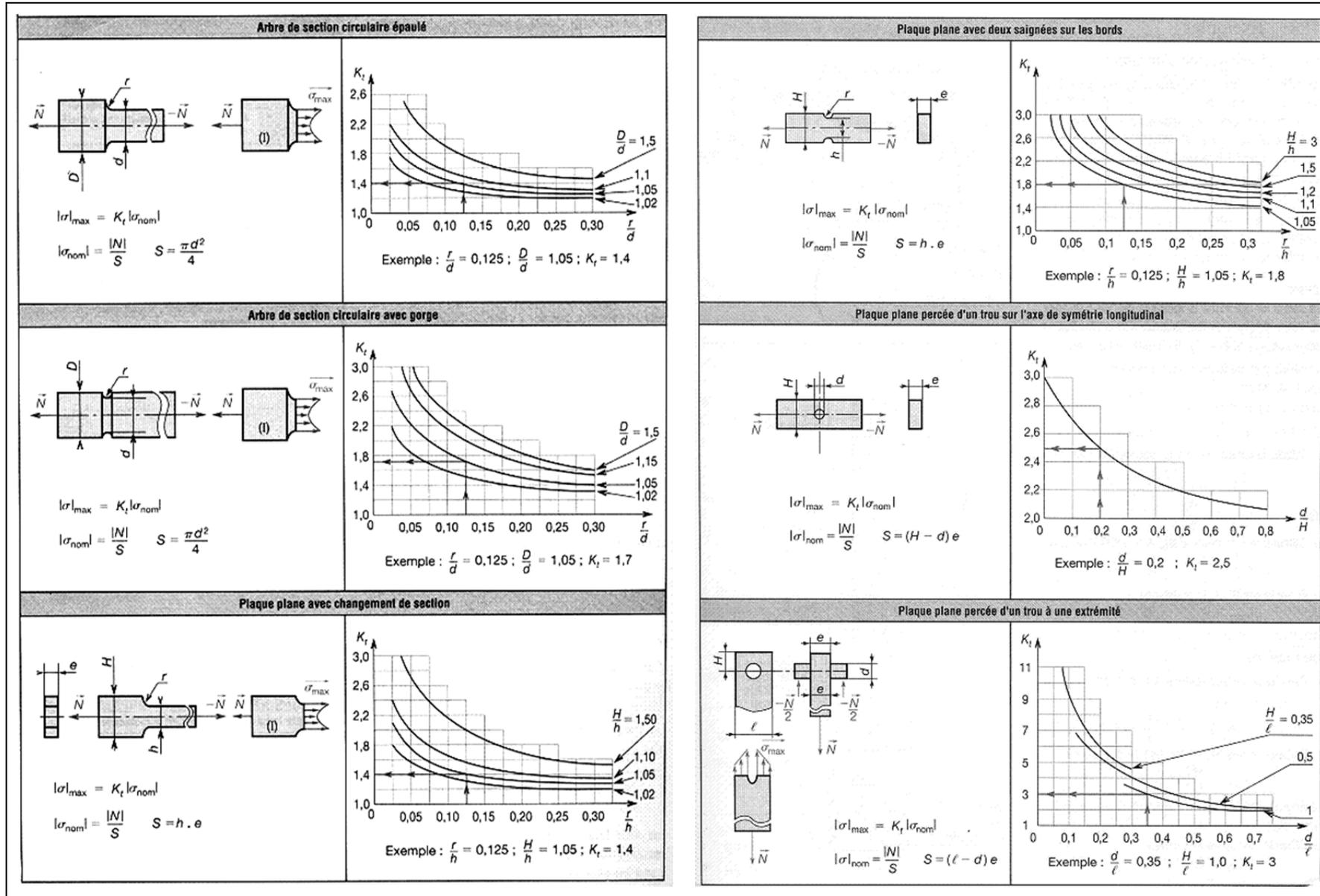


Figure 3.5 : Coefficient de concentration de contrainte k_t

VII. Application :**VII.1. Énoncé :**

Une barre d'acier de 10 mm de diamètre reçoit une force de traction de 12560 N.

Quelle sera l'allongement de la barre de 5 mètres si la $E = 210000 \text{ N/mm}^2$. Quelle sera alors la contrainte dans cette barre ?

VII.1. Corrigé :**Solution :**

Recherche de la section de la barre :

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 10^2}{4} = 78.54 \text{ mm}^2$$

L'allongement de la barre :

$$\Delta l = \frac{N l_0}{E A} = \frac{12560 \times 5000}{210000 \times 78.54} = 3.8 \text{ mm}$$

La contrainte sera égale à :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{12560}{78.54} = 159.9 \text{ N/mm}^2 \approx 160 \text{ N/mm}^2$$

Chapitre IV :***Cisaillement simple.***

Objectifs Déterminer la répartition des contraintes dans une section de poutre sollicitée au cisaillement.
Vérifier la condition de résistance pour une poutre sollicitée au cisaillement.
Dimensionner une poutre sollicitée au cisaillement.

Pré-requis Torseur de cohésion.
Contrainte tangentielle.

Eléments de contenu Essai de cisaillement, Déformations, Contraintes.
Condition de résistance en cisaillement.

I. Introduction :

Définition :

Il y a **cisaillement** lorsqu'une pièce est sollicitée par deux forces égales, de même droite d'action mais de sens contraires qui tendent à faire **glisser** l'une sur l'autre les deux parties de la pièce .

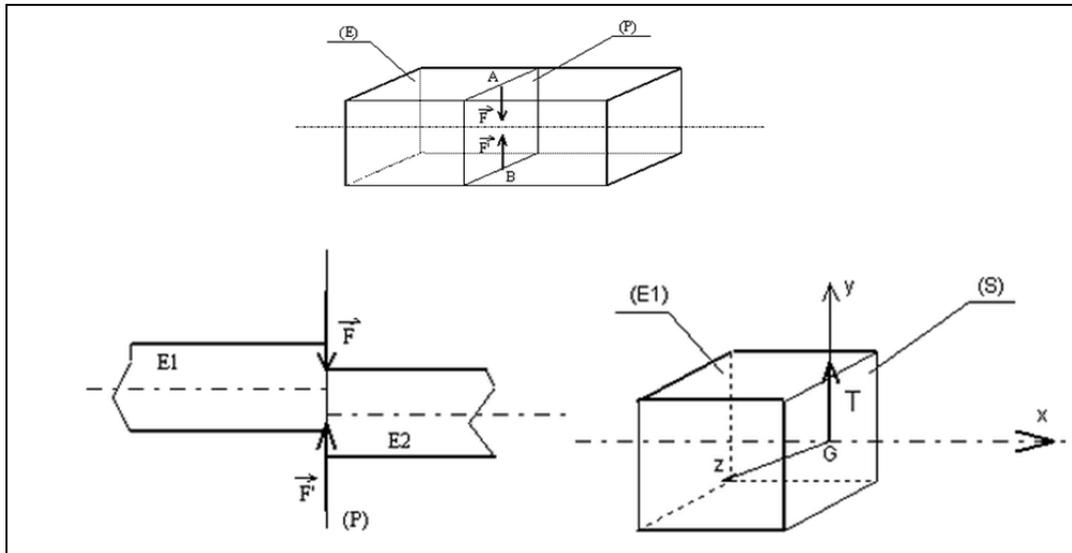


Figure 4.1 : Modélisation d'une éprouvette sollicitée au cisaillement.

Sous l'action de ces deux forces la poutre tend à se séparer en deux tronçons **E1** et **E2** glissant l'un par rapport à l'autre dans le plan de section droite (P).

Une section droite (S) d'une poutre (E) est sollicitée au cisaillement simple si les éléments de réduction au centre de surface G de (S) du torseur des efforts de cohésion sont :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{T} \\ 0 \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

II. Essai de cisaillement :

La sollicitation de cisaillement pur est un cas très particulier de la RDM car elle est impossible à réaliser expérimentalement. D'autre part le cisaillement simple concerne une section de la poutre et non la poutre entière.

Les essais et résultats qui suivent permettent toutefois de rendre compte des actions tangentielles dans une section droite et serviront ainsi dans le calcul de pièces soumises au cisaillement.

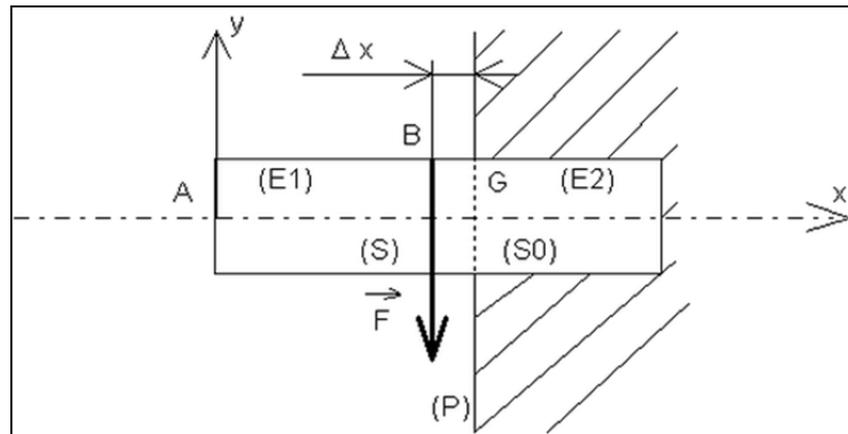


Figure 4.2 : Poutre sollicitée en cisaillement.

Considérons une poutre (E) parfaitement encastree et appliquons-lui un effort de cisaillement F uniformément réparti dans le plan (P) de la section droite (S) distante de Δx du plan (S₀) d'encastrement.

On se rapproche des conditions du cisaillement réel, à condition de vérifier que Δx es très petit.

Si l'on isole (E1), on trouve alors le torseur de cohésion suivant :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & F.\Delta x \end{Bmatrix}_G$$

Lorsque Δx tend vers 0, on retrouve alors le torseur de cohésion du cisaillement pur.

III. Etude des déformations en cisaillement :

Si on trace la variation du glissement Δy en fonction de l'effort F, on obtient la courbe représentée à la figure 4.3, ayant une zone de déformations élastiques (OA) et une zone de déformations permanentes (ABC).

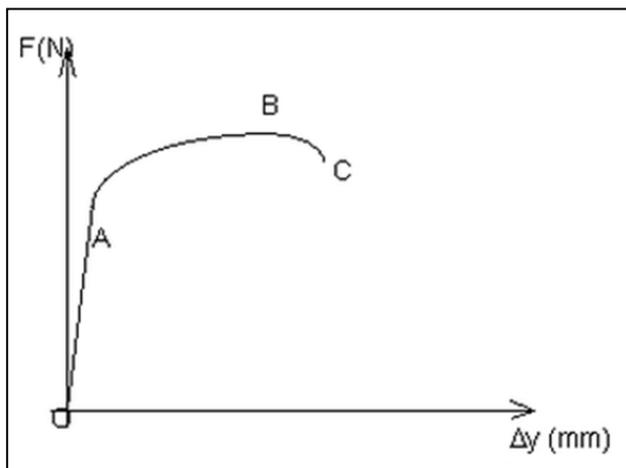


Figure 4.3 : courbe de $F=f(\Delta y)$.

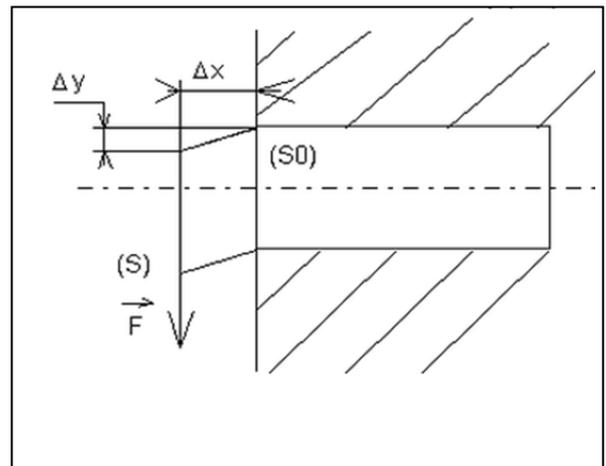


Figure 4.4 : Glissement transversale Δy

La section S cisailée se déplace dans son plan. Ce déplacement est un glissement. Il est défini par un angle de glissement γ . Cet angle défini par $\text{tg } \gamma = \Delta y / \Delta x$.

La déformation γ , appelée glissement relatif ou déviation (sans unité) reste faible dans le domaine élastique d'où $\gamma = \Delta y / \Delta x$

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement τ varie linéairement en fonction de l'angle de glissement γ , on introduit alors le module de Coulomb G telle que :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

ν : étant le coefficient de Poisson

IV. Etude de contrainte en cisaillement :

Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de cisaillement ΔF contenu dans le plan (S).

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\tau = \frac{\|\vec{T}\|}{S}$$

Avec :

τ : contrainte tangentielle en Mpa ou N/mm²

\vec{T} : effort tranchant en N

S : aire de la section droite cisailée en mm²

V. Condition de résistance au cisaillement :

Pour des raisons de sécurité, la contrainte tangentielle τ doit rester inférieure à une valeur limite appelée résistance pratique de cisaillement τ_{adm} (ou R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa))

avec $\tau_{adm} = R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$ et s un coefficient de sécurité ;

La condition de résistance s'écrit alors : $\tau < \tau_{adm}$

VI. Application :

La contrainte de cisaillement dans un corps métallique est égale à 1050 kg/cm² .Si le module de cisaillement vaut 8400 kN/cm² , déterminer la déformation de cisaillement.

Corrigé :

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = 0.00125$$

Chapitre V :

Torsion simple.

Objectifs	Déterminer la répartition des contraintes dans une section de poutre sollicitée à la torsion. Vérifier la condition de résistance pour une poutre sollicitée à la torsion. Dimensionner une poutre soumise à une torsion.
Pré-requis	Torseur de cohésion. Contrainte tangentielle.
Eléments de contenu	Essai de torsion. Relations : Contrainte – Déformation / Contrainte -moment de torsion. Conditions de résistance / de rigidité à la torsion. Concentration de contraintes.

I. Introduction :

Définition :

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si elle est soumise à deux couples de moments opposés portés par la ligne moyenne.

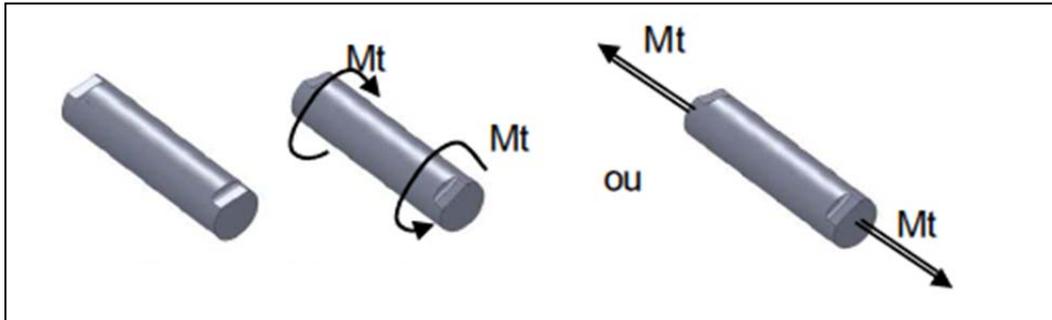


Figure 5.1 : Moments des actions extérieures appliqués à de la poutre.

La poutre est supposée à section circulaire constante et de poids négligé.

Le tenseur efforts de cohésion à la section droite (S) de centre de surface G est défini par :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

II. Essai de torsion simple :

II.1. Principe :

Une éprouvette cylindrique de révolution est encastrée à son extrémité (S1) de centre de gravité G1 . On applique à l'extrémité droite sur la section (S2) de centre de gravité G2 une action mécanique modélisée en G2 par un tenseur « couple » :

$$\{\tau\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_{G_2} \end{Bmatrix}_{G_2}$$

En faisant croître $\vec{M}_{G_2} = M_{G_2} \cdot \vec{x}$, on mesure les déformations de la poutre.

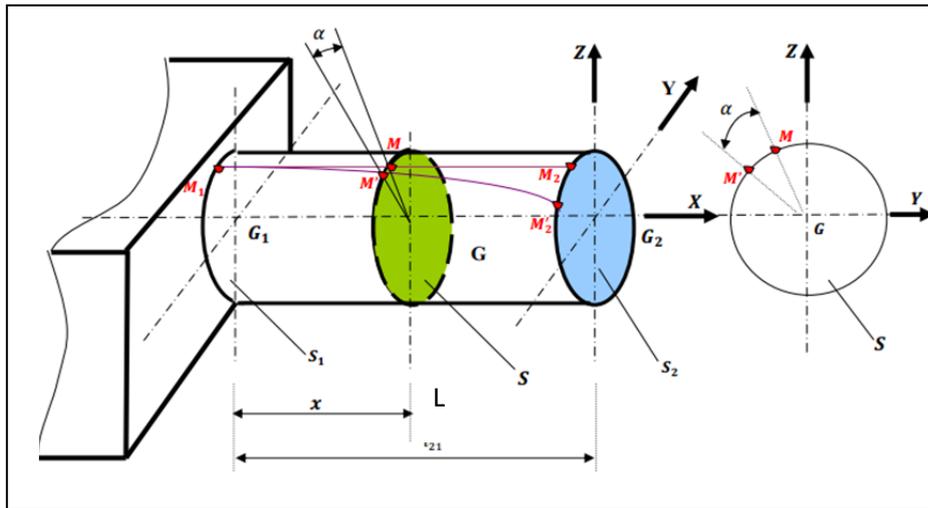


Figure 5.2 : Illustration de l'essai de torsion simple.

II.2. Résultats :

Le déplacement d'une section droite (S) est uniquement une rotation d'un angle α autour de son axe, et cette rotation est proportionnelle à sa distance x par rapport à (S_1).

On obtient une courbe illustrée à la Figure 5.3 semblable à celle de l'essai de traction :

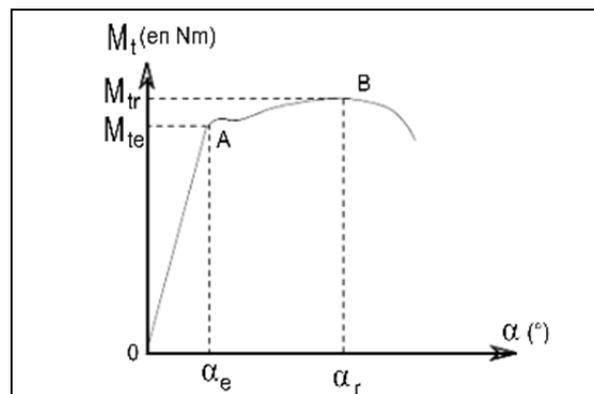


Figure 5.3 : courbe $M_t=f(\alpha)$

Elle comprend une zone de déformations élastiques où l'angle de torsion α est proportionnel au moment de torsion. A partir du point A les déformations croissent rapidement jusqu'à avoir rupture de l'éprouvette.

III. Etude des déformations :

L'essai montre que toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe et que la distance relative entre deux sections reste sensiblement constante. Toutes les fibres se déforment donc suivant une hélice, sauf la ligne moyenne qui reste droite.

On constate que le rapport $\theta = \frac{\alpha}{x}$ reste toujours constant. Ce rapport est appelé angle unitaire de torsion [rad/mm].

α = Angle de rotation de la section S en rad.

x = Distance séparant S à la section de référence S_0 en mm.

IV. Etude des contraintes :

On considère un petit élément de longueur Δx d'une fibre : Après déformation, le point M2 (Figure 5.2) situé à une distance ρ du point G vient en M2', la génératrice M1M2 subit alors une déviation γ comparable à celle observée dans l'étude du cisaillement simple.

la distance relative entre deux sections reste constante au cours de la déformation, donc l'allongement $\Delta x = 0$, alors on peut écrire que la déformation longitudinale $\epsilon_x = 0$, on admet donc que la composante normale nulle.

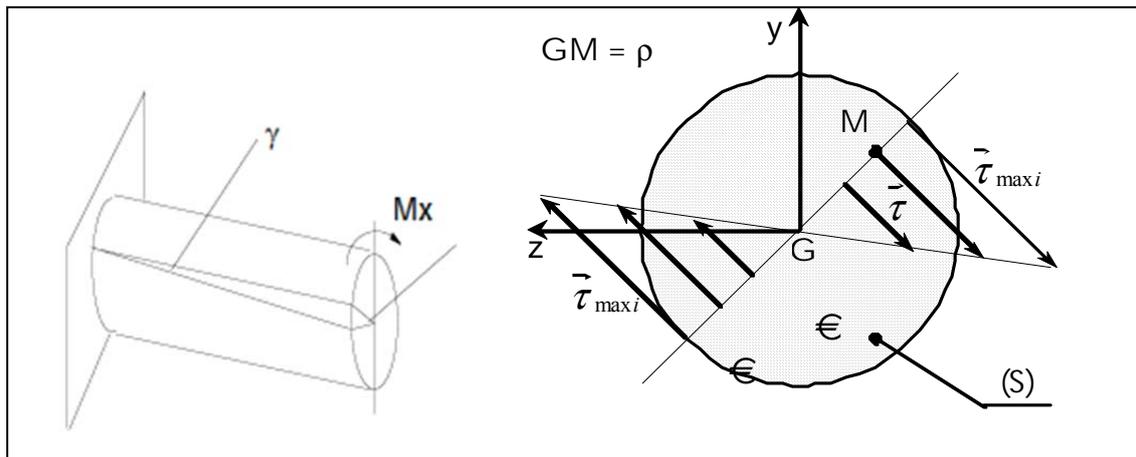


Figure 5.4 : Répartition des contraintes au niveau de la section.

La loi de Hooke pour les contraintes tangentielles s'exprime donc par : $\tau = G \cdot \gamma$ où G est le module d'élasticité transversale ou module de Coulomb.

Comme l'angle γ est petit : l'arc $M_2 M_2' = \alpha \rho = \gamma x$, on aura $\gamma = \frac{\alpha \cdot \rho}{x} = \theta \cdot \rho$

La contrainte tangentielle s'écrit : $\tau = G \cdot \theta \cdot \rho$

τ : Contrainte tangentielle de torsion (en MPa)

ρ : Distance du point M à la ligne neutre ou axe de la pièce qui ne subit aucun effort (en mm)

θ : Angle unitaire (en rad/ mm)

G : Module d'élasticité transversal ou module de coulomb (en MPa)

Remarque : τ_{\max} est atteinte pour les points M périphériques de la surface du solide tels que $\rho = R$ (Rayon)

IV.1. Relation entre contrainte et moment de torsion :

En un point M de la section, Le vecteur contrainte s'écrit : $\vec{C}(M, \vec{x}) = \tau_{(M)} \vec{t} = G \theta \vec{r}$

Le moment de torsion est suivant l'axe $(0, \vec{x})$ s'écrit : $\vec{M}_t = M_t \vec{x}$

D'autre part $\vec{M}_t = \int_S G \vec{M} \wedge \vec{C}(M, \vec{x}) dS = \int_S r \vec{x}_1 \wedge G \theta \vec{r} dS = G \theta \int_S r^2 dS \vec{x} \Rightarrow M_t = G \theta \int_S r^2 dS$

$\int_S r^2 dS$ est par définition le moment quadratique polaire de la surface S par rapport à son centre de gravité G. Il est noté I_G qui dépend de la forme et des dimensions de cette section.

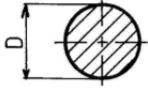
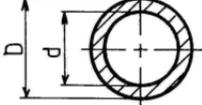
Sections	Caractéristiques
	$I_o = \frac{\pi D^4}{32}$ $\frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3}{16}$
	$I_o = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$ $\frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3}{16} - \frac{\pi d^3}{16}$

Figure 5.5 : Moment quadratique polaire en fonction de la section.

La relation entre le moment et la déformation (équation de déformation) est: $M_t = G\theta I_{Gz}$

Il en découle $\tau_{(M)} = \frac{M_t}{I_G} r$ ou $\tau_{(M)} = \frac{M_t}{\frac{I_G}{r}}$

La contrainte maximale de torsion est obtenue pour $r=R$: $\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_G} R$

M_t : [N mm]; θ [rad/mm]; G [Mpa] et I_G : [mm⁴]

V. Condition de résistance:

la contrainte τ_{\max} doit rester inférieure à la valeur de la contrainte pratique au glissement R_{pg} , en adoptant un coefficient de sécurité s tel que $R_{pg} = R_e/s$, où s dépend de l'application.

D'où la condition de résistance d'une pièce en torsion :

$$\tau_{\max} \leq R_{pg} \Rightarrow \frac{M_t}{I_G} R \leq R_{pg}$$

VI. Condition de rigidité :

Le calcul des dimensions des arbres de transmission ou barres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion unitaire θ ne doit pas dépasser pendant le service, une valeur limite θ_{\lim} . D'où la condition de rigidité d'une pièce en torsion :

$$\frac{M_t}{GI_G} \leq \theta_{\lim}$$

VII. Concentration de contraintes :

En tenant compte d'un éventuel coefficient k de concentration de contraintes, La condition de résistance s'écrit : $\tau_{eff\ max} \leq R_{pg}$ avec $\tau_{eff\ max} = K_t \tau_{th\ max}$

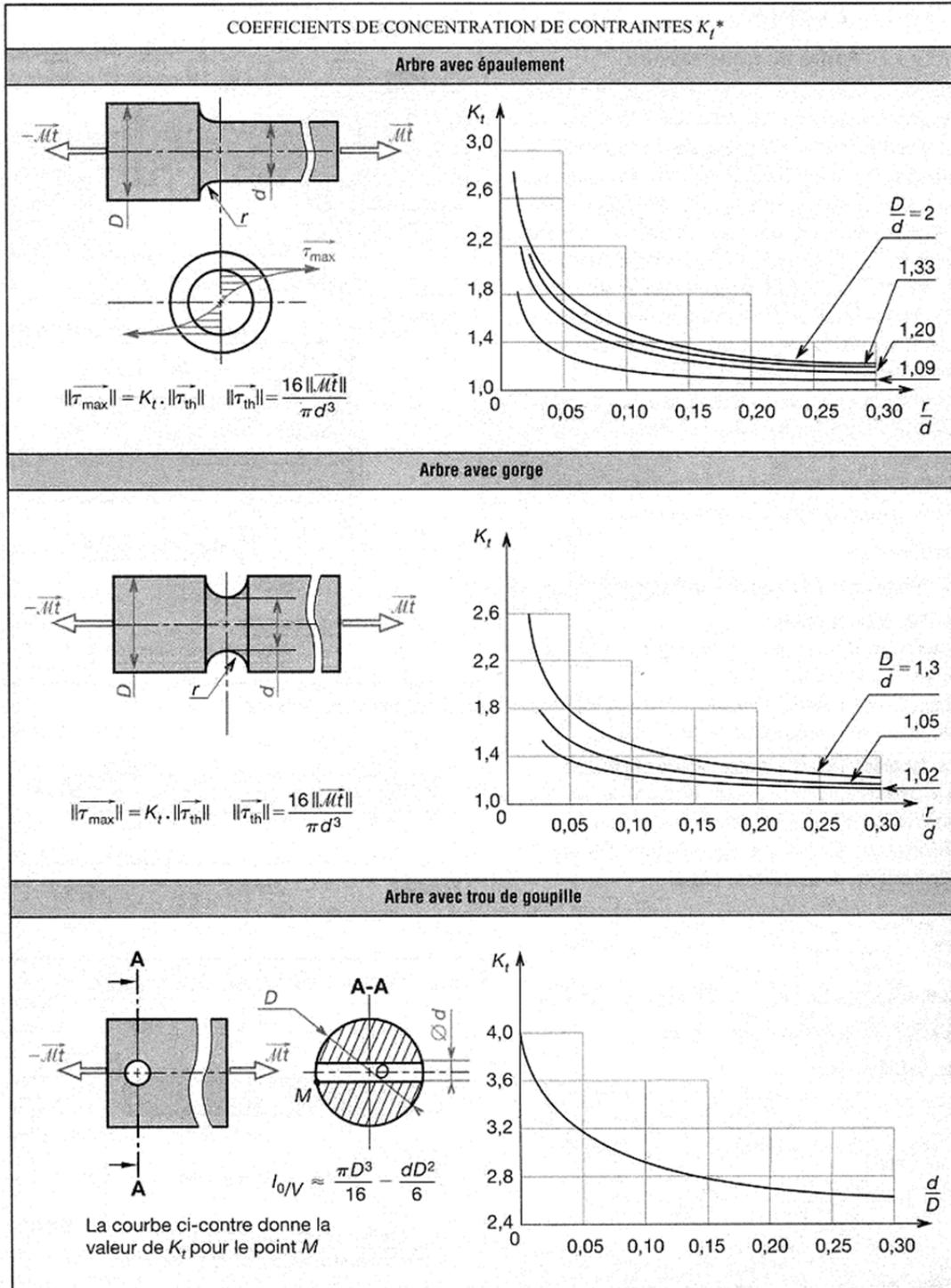


Figure 5.6: Coefficient de concentration de contraintes K en Torsion simple.

Chapitre VI :***Flexion simple.***

<i>Objectifs</i>	Déterminer la répartition des contraintes dans une section de poutre sollicitée à la flexion. Vérifier la condition de résistance pour une poutre sollicitée à la flexion. Dimensionner une poutre sollicitée à la flexion.
<i>Pré-requis</i>	Torseur de cohésion. Contrainte tangentielle.
<i>Éléments de contenu</i>	Étude des contraintes/ Déformation en flexion simple. Relation contrainte - moment de flexion. Conditions de résistance / de rigidité en flexion. Concentration de contrainte.

I. Introduction :

Une poutre est sollicitée en flexion simple lorsque toutes les forces appliquées à la poutre que ce soient les forces à distance ou les forces élémentaires de liaison sont perpendiculaires à la ligne moyenne, et soit situées dans le plan de symétrie, soit réparties symétriquement par rapport à celui-ci, ou concentrées en un point ou réparties suivant une loi.

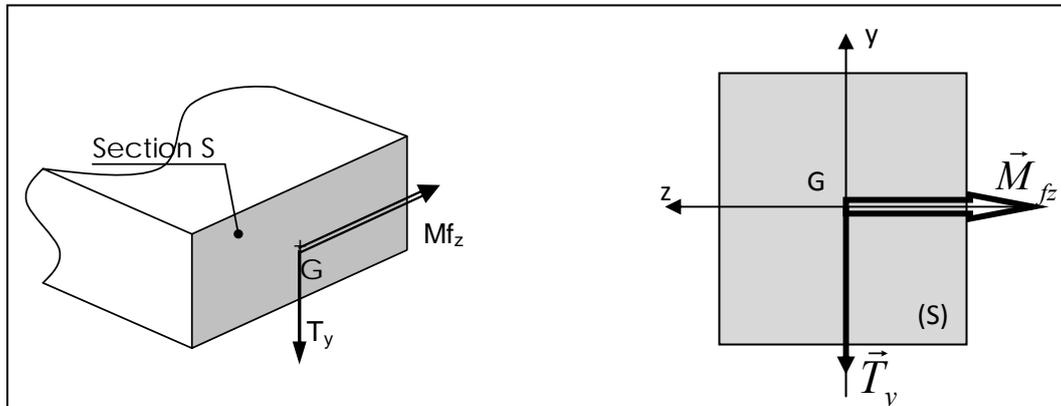


Figure 6.1: Modélisation des efforts extérieurs sur une poutre soumise à une flexion simple

Au cours de la déformation, les sections droites (constantes) restent planes et normales à la ligne moyenne.

La ligne moyenne de la poutre est rectiligne et confondue avec l'axe (o,x) .

Le torseur associé aux efforts de cohésion peut se réduire en G, barycentre de la section droite S, à une résultante contenue dans le plan de la section et à un moment perpendiculaire à cette dernière.

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

II. Essai de flexion :

Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumise à une charge concentrée verticale (figure 6.2).

Après déformation, cette poutre fléchit : On constate que les fibres situées dans la partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles situées en partie inférieure sont sollicitées en traction.

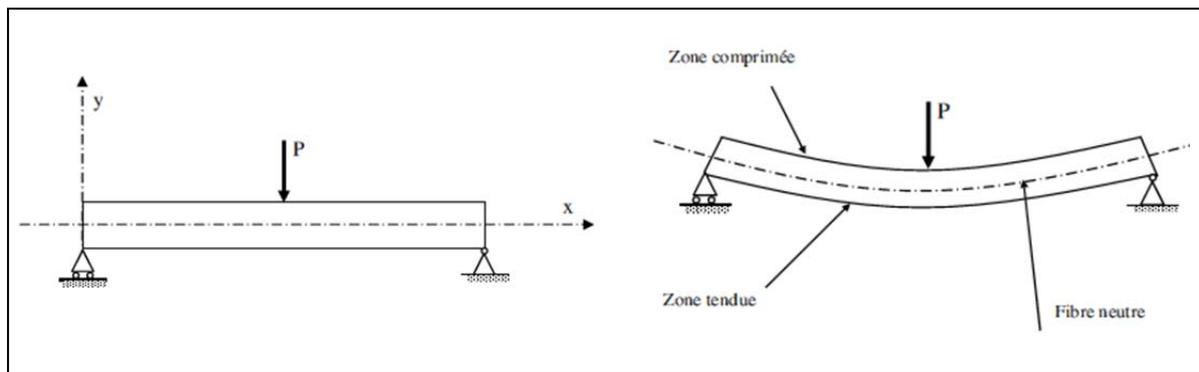


Figure 6.2: Modélisation d'un essai de flexion trois points.

Entre ces deux régions il existe une fibre qui reste ni tendue ni comprimée : la fibre neutre.

Les allongements ou raccourcissements relatifs sont proportionnels à la distance y de la fibre considérée.

III. Répartition des contraintes :

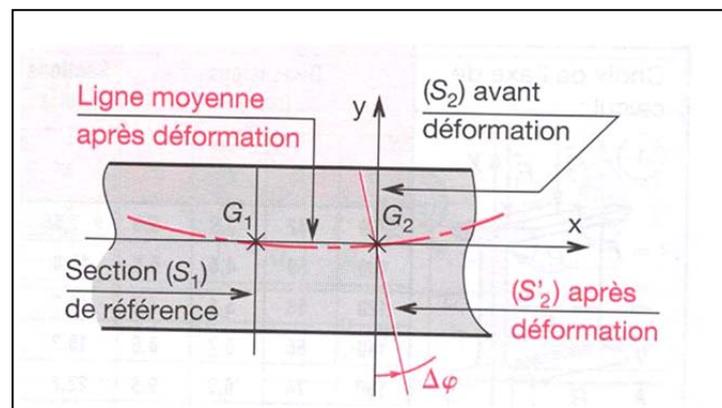


Figure 6.3: Définition de l'angle $\Delta\phi$.

Lorsque la poutre fléchit (Figure 6.3), la section droite pivote d'un angle $\Delta\phi$

Les contraintes normales engendrées sont proportionnelles à la distance qui les sépare du plan des fibres moyennes, d'où : $\sigma_M = -E\theta y$

E : Module, d'Young [MPa]

Y : distance de M par rapport à la fibre neutre [mm].

$\theta = \frac{\Delta\phi}{\Delta x}$: Angle unitaire de flexion [rad/mm]

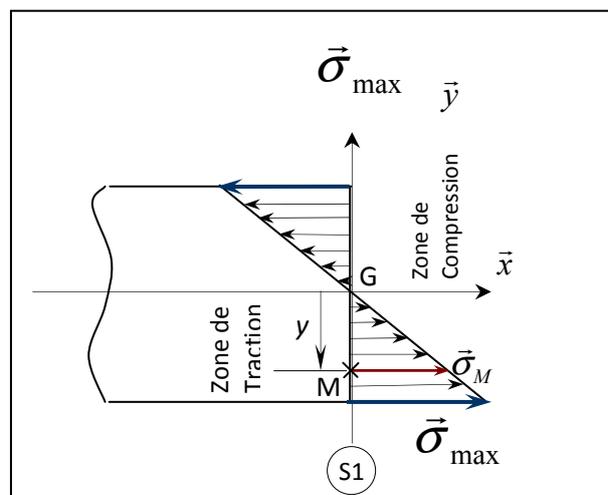


Figure 6.4: Répartition des contraintes dans une section droite.

Relation entre contrainte et moment fléchissant :

Le vecteur contrainte dans la section droite s'écrit :

$$\vec{C}(M, \vec{x}) = \sigma_x \vec{x} = -E\theta y \vec{x}$$

Le moment résultant du torseur de cohésion $\vec{M}_{fz} = M_{fz} \vec{z} = \int_S G\vec{M} \wedge \vec{C}(M, \vec{x})$

$$G\vec{M} = y\vec{y} + z\vec{z}, \text{ Il en résulte que : } M_{fz} = \int_S E\theta y^2 dS = E\theta \int_S y^2 dS$$

$$\text{Or } \sigma_x = -E\theta y \Rightarrow E\theta = -\frac{\sigma_x}{y} \quad \text{Donc : } M_{fz} = -\frac{\sigma_x}{y} \int_S y^2 dS = -\frac{\sigma_x}{y} I_{GZ}$$

$$\text{Finalement } M_{fz} = -\frac{\sigma_x}{y} I_{GZ} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{M_{fz}}{I_{GZ}} y$$

Les contraintes maximales se développent dans les fibres les plus éloignées de la fibre neutre. :

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_{fz}|_{\max}}{\frac{I_{GZ}}{v}}$$

$v = |y|_{\max}$: Ordonnée du point le plus éloigné de (G, \vec{z}) [mm].

$\frac{I_{GZ}}{v}$: Module de flexion de la section droite (S1).

σ_M : Contrainte normale de flexion en M [MPa]

IV. Condition de résistance à la flexion

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale due à la flexion doit rester inférieure à la résistance pratique à l'extension R_{pe} . On définit $R_{pe} = \frac{R_e}{s}$

La condition de résistance s'écrit :

$$|\sigma|_{\max} \leq R_{pe}$$

R_{pe} : la résistance pratique à l'extension (MPa)

R_e : la résistance élastique à l'extension du matériau (en Mpa)

s : coefficient de sécurité

V. Concentration de contraintes :

En tenant compte d'un éventuel coefficient k de concentration de contraintes, La condition de résistance s'écrit :

$$|\sigma_{\max}|_{eff} \leq R_{pe}$$

Les coefficients de concentration des contraintes K sont donnés à partir des abaques (Fig 6.5).

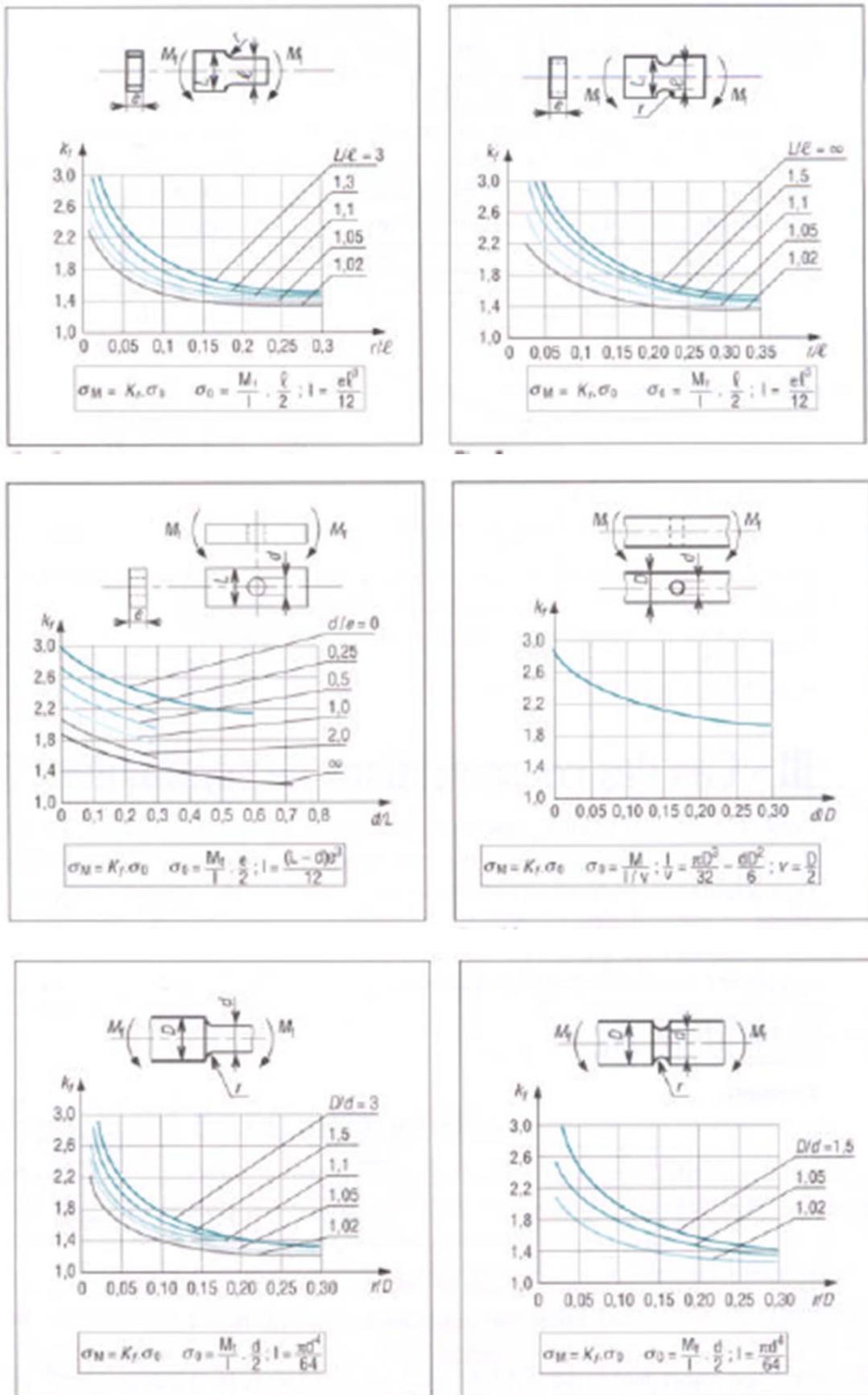


Figure 6.5: Coefficient de concentration de contraintes K en flexion simple.

VI. Déformation en flexion :

On appelle déformée, la courbe de la ligne moyenne de la poutre après déformation.
L'équation de la déformée est: $y = f(x)$.

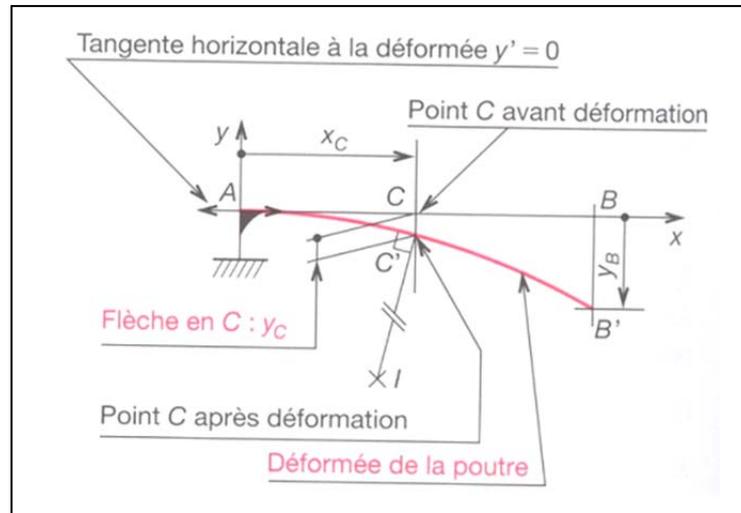


Figure 6.6: Définition de la déformée

y est la flèche au point d'abscisse x .
Les dérivées première et seconde sont notées y' et y'' .

Relation entre flèche et moment fléchissant

On peut calculer la flèche à partir de l'équation de la déformée déterminée par double intégration de l'équation du moment fléchissant. $EI_{GZ}y''(x) = -M_{fz}$

VII. Condition de rigidité en flexion :

On calcule la flèche maximale et on vérifie ensuite que cette flèche reste inférieure à une valeur limite f_{lim} $y_{max} \leq f_{lim}$

Chapitre VII :

Principe de superposition.

Objectifs Appliquer le principe de superposition pour décomposer les sollicitations complexes en sollicitations simples.
Résoudre des cas simples de problèmes hyperstatiques.

Pré-requis Les sollicitations simples.

Éléments de contenu Principe de superposition.

I. Introduction :

Les sollicitations vues dans les cours précédent sont rarement présentes seules. Une méthode pour résoudre des problèmes complexes de façon simple est de se ramener aux problèmes simples que l'on sait résoudre. On utilise ensuite la linéarité des équations de la RDM pour obtenir le résultat du problème complexe par sommation des résultats des problèmes simplifiés.

II. Principe de superposition :

II.1. Énoncé:

« L'effet produit par plusieurs actions mécaniques est égal à la somme des effets produits par ces actions mécaniques prises séparément »

On entend par « effet des actions mécaniques », l'état de contrainte généré par ces actions ainsi que les déformations associées.

L'application du principe de superposition énoncé précédemment permet d'écrire : « Si une poutre est soumise à plusieurs sollicitations simples, l'état de contrainte et de déformation est la somme des états de contrainte et de déformation dus à chacune de ces sollicitations simples prise séparément »

II.2. Limites du théorème de superposition:

- la limite élastique ne doit pas être atteinte,
- la somme des actions extérieures des différents problèmes de sollicitations simples doit être égale à celle du problème complexe.

III. Application du principe de superposition au dimensionnement d'un poutre soumise à une sollicitation composée : problème de flexion/traction.

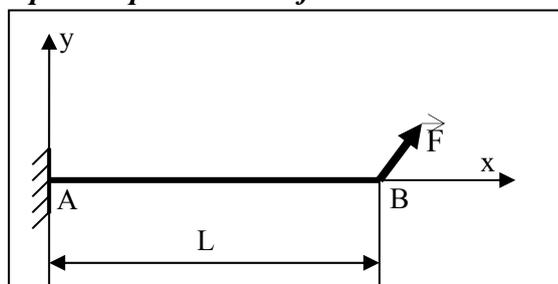


Figure 7.1.a : problème de flexion/traction.

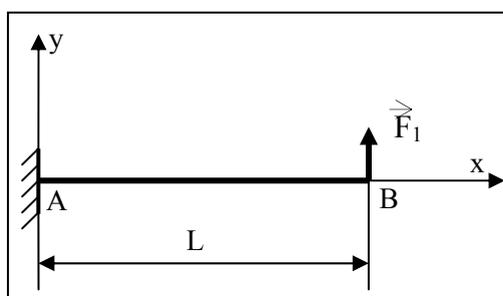


Figure 7.1.b : problème de flexion simple

+

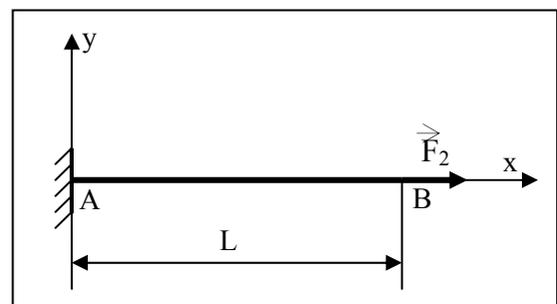


Figure 7.1.c : problème de traction simple.

On vérifie que : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Théorème de superposition pour les contraintes normales est : $\sigma(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x)$

Soit pour l'exemple :
$$\sigma(x) = (L-x)F_1 \frac{y}{I_{Gz}} + \frac{F_2}{s}$$

Condition de résistance :

Elle consiste à limiter la valeur de la contrainte normale maximale (en valeur absolue) régnant dans la poutre étudiée par la résistance pratique R_p :

$$|\sigma_{\max}| = \sup(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \leq R_p$$

IV. Application du principe de superposition à la résolution d'un problème hyperstatique :

IV.1. Isostatisme - Hyperstatisme :

- Un problème de RdM est dit isostatique si l'écriture de l'équilibre de la structure permet de déterminer les actions de liaisons. Le nombre d'inconnues de liaison est donc égal au nombre d'équations disponibles par écriture du principe fondamental de la statique.
- Un système est hyperstatique lorsque les équations issues de l'application du principe fondamental de la statique ne permettent pas de calculer toutes les inconnues d'efforts des liaisons.

IV.2. Utilisation du principe de superposition :

Prenons l'exemple d'une poutre sur deux appuis soumise à une charge concentrée en son milieu et à une charge répartie q sur toute sa longueur. L'étude de cette poutre se ramène à l'addition, ou la superposition, des deux systèmes isostatiques 1 et 2 .

Décomposition du problème hyperstatique

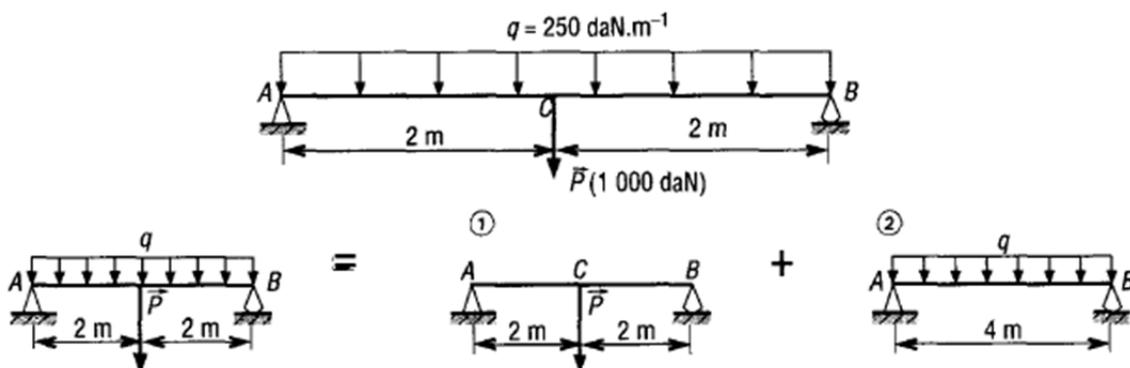
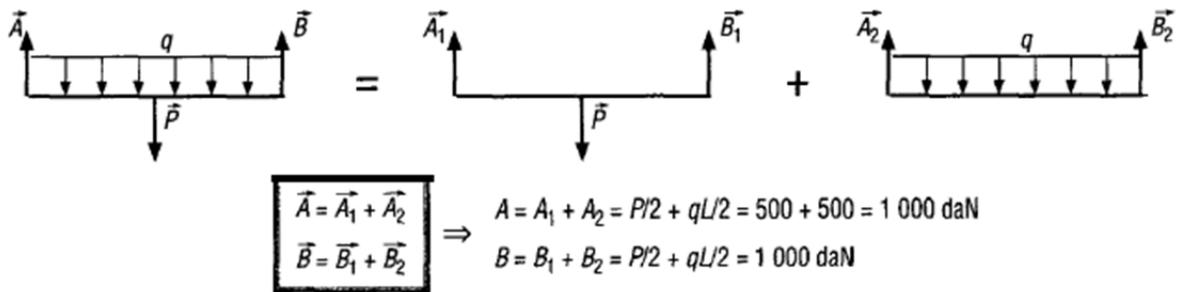


Figure 7.2: Décomposition d'un problème hyperstatique.

Actions exercées par les appuis :

Les contraintes s'ajoutent algébriquement ; les contraintes de compressions se retranchent des contraintes de traction, etc.

Les déformations et les autres grandeurs (T, M,, etc.) s'ajoutent algébriquement en tout point :

$$\sigma(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x)$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

La flèche est maximale en c : $f_c = f_{1c} + f_{2c}$

Chapitre VIII :

Sollicitations composées.

Objectifs	Répartition des contraintes dans la section d'une poutre soumise à une sollicitation composée. Vérifier la condition de résistance d'une poutre soumise à une sollicitation composée. Dimensionner une poutre soumise à une sollicitation composée.
Pré-requis	Les sollicitations simples.
Eléments de contenu	Flexion - torsion Traction - torsion. Flexion - traction.

I. Introduction :

Pour simplifier l'étude des effets des sollicitations, nous avons jusqu'ici considéré les différentes sollicitations séparément. Dans la pratique, cependant, on rencontre rarement des cas où les sollicitations sont simples, mais plutôt différents types de leurs combinaisons. Sous les hypothèses de la RDM, ces combinaisons peuvent être analysées en utilisant le principe de superposition des efforts.

II. Flexion - Torsion :

II.1. Définition :

Un arbre est soumis à une sollicitation de flexion-torsion si le torseur associé aux efforts de cohésion peut se réduire en G, barycentre de la section droite S, à un moment de torsion et à un moment de flexion (figure 8.1).

$$\{\tau_{coh}\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{M}_{fz} + \vec{M}_t \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{matrix} \right\}_G$$

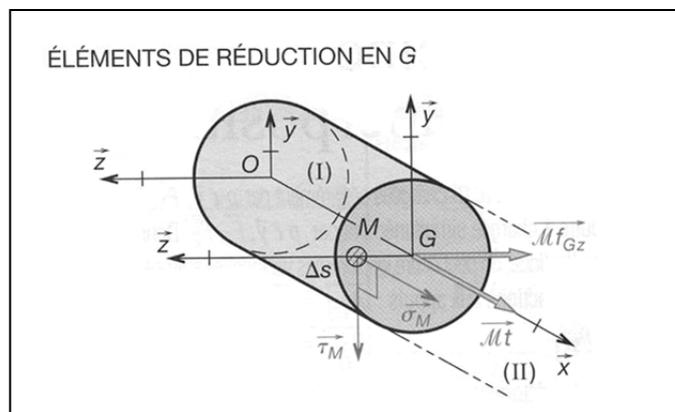


Figure 8.1 : sollicitation en Flexion-Torsion

II.2. Moment idéal de flexion :

Les contraintes normales et tangentielles agissent simultanément et il y a une majoration de chacune d'elle. On calcule la contrainte normale à partir du moment idéal de flexion défini par la formule suivante

$$Mf_i = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)Mf + \frac{1}{2\lambda}\sqrt{Mf^2 + Mt^2}$$

Mfi : Moment idéal de flexion [N.mm]

Mf : Moment de flexion [N.mm]

Mt : Moment de torsion [N.mm]

$\lambda = Rpg/Rpe$; pour les aciers $\lambda=0.5$, pour les fontes $\lambda=1$

II.3. Condition de résistance :

La condition de résistance d'un arbre sollicité à la flexion-torsion s'écrit : $|\sigma_M|_{\max} \leq R_{pe}$

σ_M est déterminée à partir du moment idéal de flexion, donc :

$$|\sigma_M|_{\max} = \frac{Mf_i}{I_{Gz}} |y|_{\max} \leq R_{pe}$$

II.4. Déformation :

- Pour le calcul des flèches verticales, partir de la sollicitation de flexion supposée seule, et vérifier ensuite que cette flèche est acceptable :

$$|f|_{\max} \leq f_{\lim}$$

- Pour le calcul des angles de torsion, partir de la sollicitation de torsion supposée seule, et vérifier ensuite que cet angle est acceptable :

$$\theta_{\max} \leq \theta_{\lim}$$

III. Traction - torsion :

III.1. Définition :

Un solide est soumis à une traction-torsion si le torseur associé aux efforts de cohésion peut se réduire en G, barycentre de la section droite S, à un moment de torsion et à un effort normal :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M}_t \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} NM_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

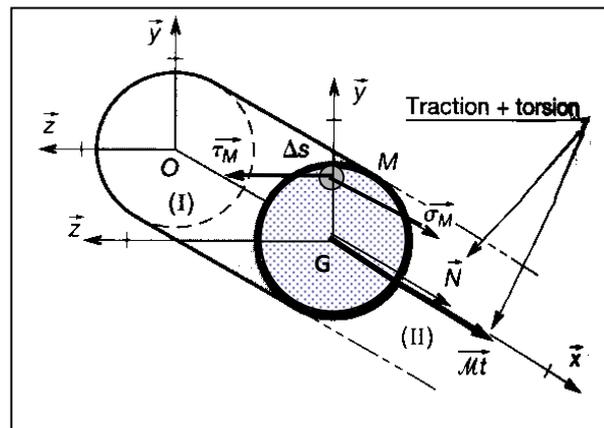


Figure 8.2 : sollicitation en Traction - torsion

III.2. Contrainte idéale :

Toute fibre supporte deux contraintes de nature différente, une contrainte normale et une contrainte tangentielle. On définit la contrainte idéale :

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \text{ où } \sigma = \frac{N}{S} \text{ et } \tau = \frac{Mt}{I_0} R$$

III.3. Condition de résistance

La condition de résistance pour ce type de sollicitations s'écrit : $\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq \frac{\sigma_e}{S}$

IV. Torsion – cisaillement :

IV.1. Définition :

Un solide est soumis à une torsion-cisaillement si le torseur associé aux efforts de cohésion peut se réduire en G, barycentre de la section droite S, à un moment de torsion et à un effort tranchant :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ \vec{M}_t \end{matrix} \right\}_G$$

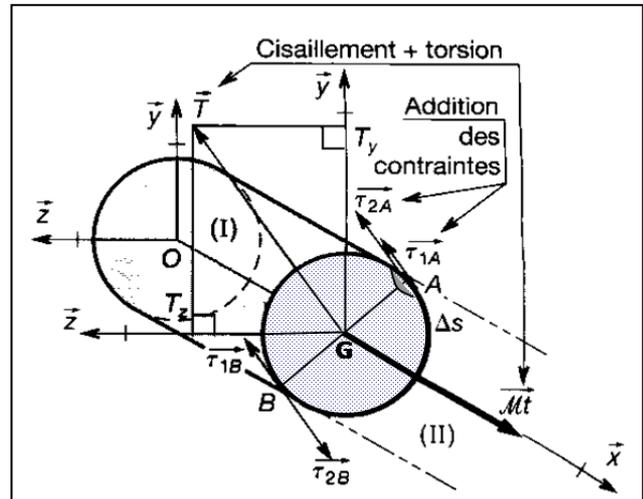


Figure 8.3 : sollicitation en Torsion – cisaillement

IV.2. Calcul de contraintes et Condition de résistance :

Les contraintes sont de même nature. En A, elles s’ajoutent : $\tau_{total A} = \tau_{1A} + \tau_{2A}$

La condition de résistance s’écrit : $\tau_{total A} = \tau_{1A} + \tau_{2A} \leq R_{pg}$

Avec : $\tau_{1A} = \frac{T}{S}$ et $\tau_{2A} = \frac{M_t}{I_0} \cdot R$

R_{pg} : Résistance pratique au glissement.

V. Flexion et traction :

Un solide est soumis à une sollicitation de flexion-traction (compression) si le torseur associé aux efforts de cohésion peut se réduire en G, barycentre de la section droite S, à un moment de flexion et à un effort normal.

Toute fibre supporte deux contraintes normales. On définit alors une contrainte résultante comme étant la somme vectorielle de la contrainte de traction et de celle de flexion :

$$\sigma_{résultante} = \sigma_{traction} + \sigma_{flexion}$$

Avec :

$$\sigma_{traction} = \frac{N}{S} \quad \text{et} \quad \sigma_{flex} = \frac{Mf}{I_G} \cdot \rho$$

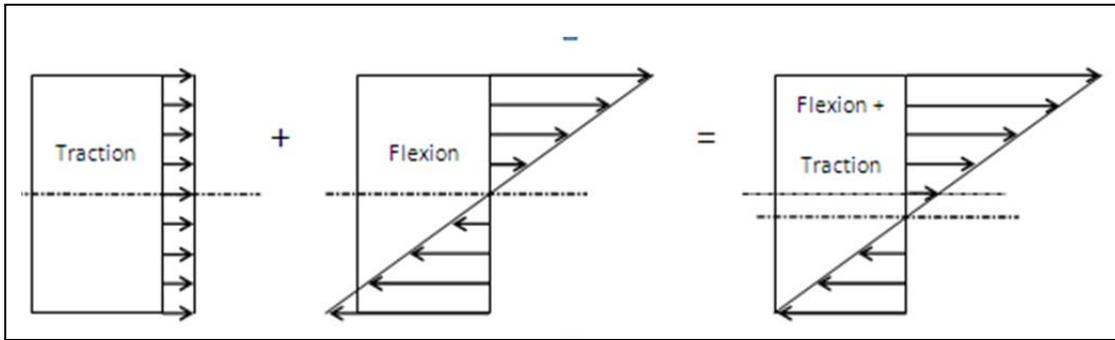


Figure 8.4 : contrainte normales résultantes pour une sollicitation en flexion et traction

Condition de résistance :

$$|\sigma_{résultante}| \leq R_{pe}$$

Chapitre IX :

Flambement des poutres comprimées.

Objectifs Définir le flambage, la charge d'Euler et la contrainte critique
Vérifier Dimensionner une poutre sollicitée au flambement.

Pré-requis Compression.
Moments quadratiques par rapport aux axes de section.

Eléments de contenu Elancement.
Charge critique.
Condition de résistance.
Charge admissible.

I. Introduction :

Tous les éléments de structure longs et minces ont un comportement similaire en compression. Lorsque la charge de compression augmente lentement, on atteint une valeur pour laquelle l'élément mince, au lieu de simplement se raccourcir, s'infléchit, et d'ordinaire se rompt. Cette valeur critique est appelée : charge de flambement.

Dans le cas du flambage, les formules établies tiennent compte des déformations qui ne peuvent plus être supposées infiniment petites et négligées comme dans les chapitres précédents, de même, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déformations.

Le phénomène d'instabilité transversale sous un effort de compression porte le nom de flambement.

Les formules de flambage sont utilisées avec prudence, c'est-à-dire en prenant un coefficient de sécurité très grand. Les pièces soumises au flambage doivent impérativement être droite et ne doivent pas avoir subi des déformations précédemment.

II. Phénomène de flambement:

Dans tout ce qui suit on considère que le matériau est élastique, linéaire de module de Young E et de caractéristiques mécaniques constantes.

Considérons une barre rectiligne homogène soumise à deux forces \vec{F} égales et opposées.

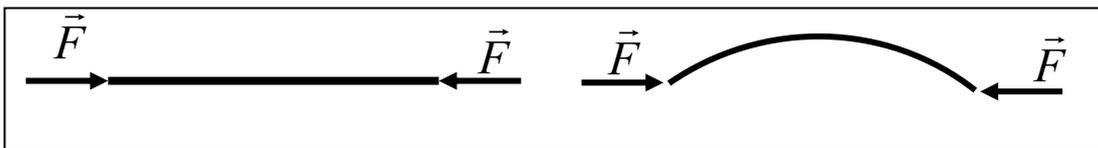


Figure 9.1 : Flambement.

On observe qu'en dessous d'une certaine valeur de F la barre est en équilibre stable (Si on l'écarte de sa position (légère flexion), lorsque la perturbation cesse, elle retrouve sa rectitude). Au-delà d'une certaine valeur, l'état d'équilibre devient instable (Si l'on écarte la barre de sa position d'équilibre, elle atteint un autre état d'équilibre stable cette fois là).

Le problème du flambement revient donc à déterminer le seuil de compression à partir duquel il y a bifurcation d'équilibre, une instabilité de structure. Ce seuil est la force critique d'Euler.

III. Charge critique d'Euler :

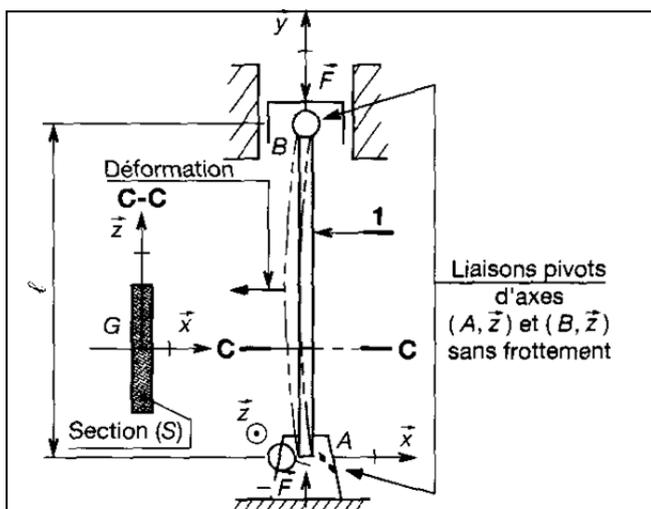


Figure 9.2 : poutre de longueur L et rectiligne soumise en A et B à deux glisseurs directement opposés, qui augmentent progressivement.

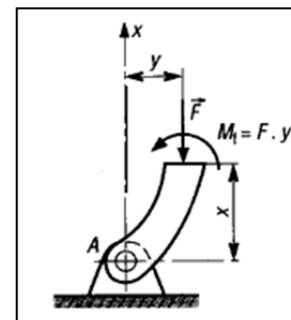


Figure 9.3 : $M_f = F y$

Prenons le cas d'une poutre droite avant déformation, articulée à ses deux extrémités A et B, et chargée de \vec{F} rigoureusement suivant son axe ou sa ligne moyenne (figure 9.2).

Utilisons la formule de la déformée en flexion : $M_f = -EI y''$.

Le moment de flexion est : $M_f = F y$ (figure 9.3).

On aura une l'équation différentielle $EI y'' + F y = 0$ dont la solution après intégration nous donne : $y(x) = C \sin \frac{n\pi x}{L}$.

Sa dérivée seconde est : $y''(x) = -C \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$

Pour $n=1$: la déformée est une arche de sinussoïde et la poutre est flambée.

L'équation différentielle devient $F y(x) = FC \sin \frac{\pi x}{L} = EIC \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$ d'où $F = EI \frac{\pi^2}{L^2}$.

Cette valeur de F est donc l'effort de compression qui est le seuil de flambement, nommée Charge critique d'Euler et notée : $F_c = EI \frac{\pi^2}{L^2}$

Remarque : La flexion se produit selon la direction perpendiculaire à l'axe de la section (S) qui donne le moment quadratique le plus faible.

Plusieurs cas sont possibles pour la poutre :

- $F < F_c$: la barre est rectiligne, en équilibre stable en compression simple.
- $F = F_c$: La barre est en équilibre instable, il peut y avoir changement d'état d'équilibre pour atteindre un état d'équilibre stable en flexion composée
- $F > F_c$: Le seul état possible est instable.

IV. Elancement :

La compression est remplacée par du flambage si la poutre est longue et ses dimensions transversales sont faibles.

Cette proportion est caractérisée par :

$$\lambda = \frac{L}{\rho}$$

λ : élancement d'une poutre (sans unité).

L : longueur libre de flambage (mm).

ρ : rayon de giration de la section (mm), défini par :

$$\rho = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{S}}$$

S : air de la section droite (mm²).

I_{Gz} : moment quadratique minimal de la section suivant l'axe principal perpendiculaire à la direction de la déformation (mm⁴).

Remarque : l est la longueur de la poutre, la longueur libre de flambage L, en fonction du type d'appui. Elle est donnée par le tableau à la figure 9.4.

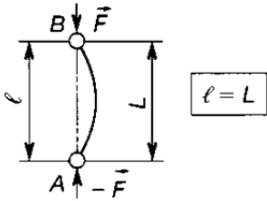
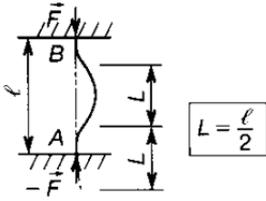
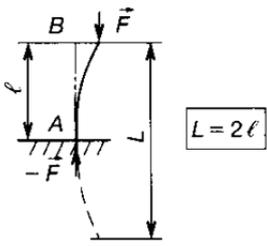
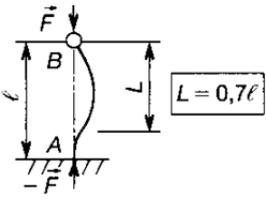
LONGUEURS LIBRES DE FLAMBAGE			
Types de liaisons	Valeurs de L	Types de liaisons	Valeurs de L
① En A et B : liaisons pivots.	 $\ell = L$	③ En A et B : liaisons encastrement.	 $L = \frac{\ell}{2}$
② En A : liaison encastrement. En B : extrémité libre.	 $L = 2\ell$	④ En A : liaison encastrement. En B : liaison pivot.	 $L = 0,7\ell$

Figure 9.4 : Différentes configurations pour le calcul de la longueur libre

V. Contrainte critique :

La longueur libre de flambage L sera prise d'après le tableau précédent, cherchons la charge critique F_c en fonction de l'élanement de la poutre λ .

$$\text{On a } \begin{cases} \lambda^2 = \frac{L^2}{\rho^2} \\ \rho^2 = \frac{I_{Gz}}{S} \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{L^2}{I_{Gz}} \cdot S \Rightarrow \frac{I_{Gz}}{L^2} = \frac{S}{\lambda^2}$$

L'expression de la charge critique nous donne : $F_c = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot S}{\lambda^2}$

On appelle contrainte critique le rapport entre la charge critique F_c et l'air de la section droite S de la poutre.

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Calcul de Elancement critique λ_c

On pose la contrainte critique $\sigma_c = R_e$ pour ne quitter pas le domaine élastique. On aura

$$\text{alors : } R_e = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \text{ avec } \lambda = \lambda_c \Rightarrow \lambda_c^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{R_e}$$

λ_c : élanement critique (ne dépend que de la nature du matériau).

E : Module d'élasticité longitudinal (MPa).

R_e : Résistance élastique du matériau (MPa).

VI. Condition de résistance :**VI.1. Coefficient de sécurité k :**

Le coefficient de sécurité K , spécifique au flambage, est le double du coefficient de sécurité habituel s (s dépend du type de construction, des conditions de calcul et d'utilisation).

$$k = 2s ; \quad s = \frac{R_{ec}}{R_{pc}} ; \quad k = \frac{2R_{ec}}{R_{pc}}$$

R_{ec} : Résistance élastique à la compression (MPa).

R_{pc} : Résistance pratique à la compression (MPa).

VI.2. Condition de résistance :

La charge critique d'Euler F_c ne doit jamais être atteinte. Il faut donc chercher une charge admissible F_{adm} sur la poutre pour qu'elle reste **stable** en toute sécurité ($F_{adm} < F_c$).

Pour la stabilité de la poutre en toute sécurité, on pose :

$$k = \frac{F_c}{F_{adm}} \Rightarrow F_{adm} = \frac{R_{pc}}{2 \cdot R_e} \cdot F_c$$

$$\text{On a } F_c = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot S}{\lambda^2} \text{ donc } F_{adm} = \frac{R_{pc}}{2 \cdot R_e} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot S}{\lambda^2}$$

$$\text{Or } \lambda_c^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{R_e} \Rightarrow F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot \lambda_c^2 \cdot S}{2 \cdot \lambda^2}$$

$$\text{Donc : } F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot S}{2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

Avec :

- $\lambda_c \approx 100$: poutres en acier (profilés).
- $\lambda_c \approx 70$: poutres en bois ou en aluminium.
- $\lambda_c \approx 60$: poutres en fonte.

VII. Critère de résistance

Selon la valeur de l'élancement de la poutre, la charge limite F_{adm} est donnée par l'une des trois relations (poutre, acier).

Poutres courtes $\lambda < 20$	Poutres moyennes $20 < \lambda < 100$	Poutres élancées $\lambda > 100$
Compression simple $F_{adm} = R_{pc} \cdot S$	Formule expérimentale de Rankine $F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$	Formule d'Euler $F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot S}{2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$

VIII. Application :

Une vis à billes de diamètre à fond de filet $d = 32\text{mm}$ est guidée à une seule extrémité par deux roulements à billes. Elle est soumise de la part de l'écrou à une charge axiale de compression. L'écrou est au maximum à $l = 1000\text{mm}$ du palier. L'élancement critique est : $\lambda_c = 60$; la résistance pratique de l'acier C 45 est : $R_{pc} = 150\text{MPa}$.

Calculer la charge admissible sur la vis pour éviter le risque de flambage.

Hypothèses :

La vis est encastrée par rapport au bâti côté roulement, libre côté écrou (monté flottant).

Solution :

- Aire de la section S :

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} ; S = \frac{\pi \cdot 32^2}{4} = 804 \text{ mm}^2 .$$

- Le moment quadratique de S :

$$I_{Gz} = \frac{\pi d^4}{64} ; I_{Gz} = \frac{\pi \times 32^4}{64} = 5,15 \times 10^4 \text{ mm}^4 .$$

- Le rayon de giration :

$$\rho = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{S}} ; \rho = \sqrt{\frac{5,15 \times 10^4}{804}} = 8 \text{ mm} .$$

- Elancement de la vis : $L=2l$

$$\lambda = \frac{2 \cdot \ell}{\rho} ; \lambda = \frac{2 \times 1000}{8} = 250 \text{ (Euler s'applique)}$$

- Charge admissible :

$$F_{\text{adm}} = \frac{R_{pc} \cdot S}{2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2} ; F_{\text{adm}} = \frac{150 \times 804}{2 \times \left(\frac{250}{60} \right)^2} ; F_{\text{adm}} \approx \mathbf{3\,474\,N} .$$

Bibliographie

[1]. J. L. Fanchon, Guide des sciences et technologies industrielles. Afnor Nathan, Paris 2001.

[2]. Chevalier, Guide de calcul en mécanique. Hachette Livre 1993.

[3]. N.BOURAHLA , Résistance des matériaux de base. Edition GECOTEC

[4]. A. Delaplace, F. Gatuingt, F. Ragueneau , Mécanique des structures : Résistance des matériaux , Dunod, Paris, 2008.

[4].J.FANCHON, Guide de mécanique : sciences et technologies industrielles, NATHAN 1998.

Lien Internet en date du 20/04/2013 :

[http://www.itterbeek.org/uploads/documents/RMChap3\(Traction\).pdf](http://www.itterbeek.org/uploads/documents/RMChap3(Traction).pdf)

<http://www.mecarazi.com/cours.item.34/rdm-traction-compression.html>

http://www.mediaamir.com/cariboost_files/Traction.pdf

<http://www.mecarazi.com/cours.item.35/rdm-cisaillement.html>